目　录

第一部分　微分流形

第二部分　黎曼几何

第一部分　微 分 流 形

第一章　多元微积分

§1.1　向 量 空 间

1.1.1　向量空间和它的对偶空间

1. 向量空间

实数域R上的**向量空间**是一个集合V，其中定义了运算：

加法：$V\times V\to V$，$(x,y)\mapsto x+y$，$\forall x,y\in V$

数乘：$R\times V\to V$，$(a,x)\mapsto ax$，$\forall a\in R$，$x\in V$它们满足以下公理：

（1）V对于加法构成一个交换群；

（2）对于$\forall a,b\in R$，$x\in V$，$(ab)x=a(bx)$；

（3）对于$\forall a,b\in R$，$x\in V$，$(a+b)x=ax+bx$；

（4）对于$\forall a\in R,x,y\in V$，$a(x+y)=ax+ay$；

（5）对于$\forall x\in V$，$1\cdot x=x$，$0\cdot x=0$。

V中的元素称为**向量**. 对于$\forall x\in V$，它的逆元素是$(-1)x=-x$，我们还定义V中的减法为$x-y=x+(-y)=x+(-1)\cdot y$。

实例

（1）$V=n$维数空间$R^n=\{(x^1,\cdots,x^n)$：$x^i\in R\}$ 在其中我们分别定义加法和数乘法为：

设$x=(x^1,\cdots,x^n)$，$y=(y^1,\cdots,y^n)$

$$x+y=(x^1+y^1,\cdots,x^n+y^n)$$

对于$\forall a\in R$，$ax=(ax^1,\cdots,ax^n)$

容易证明：公理（1）～（5）成立。

（2）设A是一集合，X是一向量空间，

$$S=X^A=\{\text{映射} f: A\to X\}$$

对于$\forall k\in R$，f、$g\in X^A$，我们定义X^A中的加法和数乘如下：

$$(f+g)(a)=f(a)+g(a),\ \forall a\in A$$

$$(kf)(a)=k\cdot f(a),\ \forall a\in A$$

则X^A是一个向量空间。

设V是一向量空间，V的子集$T\subset V$称为V的**向量子空间**，如果对于$\forall x,y\in T$和$a\in R$，我们有：$x+y\in T$和$ax\in T$。

2．线性映射

设A和B是两个集合，映射$f: A\to B$称为**一一的**，如果$f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$，对于$\forall a$、$b\in A$；称为**在上的**，如果对于$\forall b\in B$，存在$a\in A$使得$f(a)=b$。一一映射又称为**内射**，如果一个映射既是一一的，又是在上的，则称为**双内射**。

设V和T是两个向量空间，映射$f: V\to T$称为**同态**，如果对于$\forall x,y\in V$，$a\in R$，满足

$$f(x+y)=f(x)+f(y)$$

$$f(ax)=af(x)$$

同态映射又称为**线性映射**。

$\mathrm{Ker} f=\{x\in V: f(x)=0\}$称为线性映射$f$的核；$\mathrm{Im} f=\{f(x): x\in V\}$称为$f$的象。容易证明：$\mathrm{Ker} f$和$\mathrm{Im} f$分别是$V$和$T$的向量子空间，下面的命题是显然的。

命题1 线性映射$f: V\to T$是一一的，当且仅当$\mathrm{Ker} f=0$；是在上的当且仅当$\mathrm{Im} f=T$；是同构的当且仅当$\mathrm{Ker} f=0$并且$\mathrm{Im} f=T$。

3．基和维数

设V是一向量空间，A是V的子集，如果对于A中任何有限集$x_1,\cdots x_n$，有

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0,\ a_i\in R$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

则称A为线性无关的。

如果V中存在线性无关集$\{e_1, \cdots e_n\}$，使得对于$\forall\ x \in V$，可以找到一组实数$\{a_1, \cdots a_n\}$

$$x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

则称向量空间V具有有限维数n，并且集$\{e_1, \cdots, e_n\}$称为V的一组基。数组$\{a_1, \cdots, a_n\}$称为向量x关于基$\{e_1, \cdots, e_n\}$的坐标。

命题 2　如果V是有限维的，则V的每一组基中的元素的个数是相同的。

证明：设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是V的一组基，$\{f_1, \cdots, f_n, \cdots, f_m\}$是$V$的另一组基。由于

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} e_j, \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

则$\{f_1, \cdots, f_m\}$线性相关，与基的定义矛盾，所以$m = n$。‖

以下我们将只考虑有限维向量空间。设V是n维向量空间，固定V中一组基$\{e_1, \cdots, e_n\}$，对于$\forall\ x \in V$，它可以表示成

$$x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$$

这种表示法是唯一的，因为如果另有

$$x = b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n$$

则有$(a_1 - b_1)e_1 + \cdots + (a_n - b_n)e_n = 0$；又因为$\{e_1, \cdots, e_n\}$是线性无关的，所以$a_1 = b_1, \cdots, a_n = b_n$。因此，给出$n$维向量空间$V$的一组基$\{e_1, \cdots, e_n\}$，对于$\forall\ x \in V$，它对应于唯一一组有序实数，即$x$的坐标$(a_1, \cdots, a_n)$，向量的坐标表示定义了映射

$$\varphi: \ V \to R^n, \quad x \mapsto (a_1, \cdots, a_n)$$

容易证明，这是向量空间V和R^n的同构。于是我们得到

命题 3　任何n维向量空间V同构于n维数空间R^n。

4．向量空间的对偶空间

设V是n维向量空间，线性映射$f: V \to R$又称为线性函数。

考虑V上全体线性函数的集合

$$V^*=\{f:V\to R \mid f\text{ 是线性函数}\}$$

在其中定义加法和数乘如下：给出线性函数$f, g: V\to R$，定义

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\quad \forall x\in V$$

$$(a\cdot f)(x)=a\cdot f(x)\qquad \forall x\in V,\ a\in R$$

则V^*也是一向量空间，称为向量空间V的**对偶空间。**

命题 4 $\dim V^*=\dim V=n$

证明：设V的一组基是$\{e_1,\cdots,e_n\}$，定义映射φ：$V^*\to R^n$，$\varphi(f)=(f(e_1),\cdots,f(e_n))$

先证明这是一线性映射：

$$\varphi(f+g)=((f+g)(e_1),\cdots,(f+g)(e_n))$$
$$=(f(e_1),\cdots,f(e_n))+(g(e_1),\cdots,g(e_n))$$
$$\varphi(af)=(a\cdot f(e_1),\cdots,a\cdot f(e_n))$$
$$=a\cdot(f(e_1),\cdots,f(e_n))$$

再证明这个映射是双内射。任给$(a_1,\cdots,a_n)\in R^n$，定义映射f：$V\to R$为：$f(e_1)=a_1,\cdots,f(e_n)=a_n$即可，命题证毕.‖

给出V的一组基$\{e_1,\cdots,e_n\}$，考虑V^*的一组基$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$，定义为

$$e_i^*(e_j)=\delta_{ij},\quad (i,j=1,2,\cdots,n)$$

容易证明$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$是线性无关的，它们称为V^*中$\{e_1,\cdots,e_n\}$的**对偶基。**

命题 5 $V^{**}=(V^*)^*$自然同构于V.

证明：定义映射φ：$V\to V^{**}$如下：任给$x\in V$，定义

$$\varphi(x)(x^*)=x^*(x),\quad \text{对于}\forall x^*\in V^*$$

先证明φ是线性映射。对于$\forall x,y\in V$和$a\in R$，

$$\varphi(x+y)(x^*)=x^*(x+y)=x^*(x)+x^*(y)$$
$$=\varphi(x)(x^*)+\varphi(y)(x^*)$$
$$=(\varphi(x)+\varphi(y))(x^*)$$
$$\varphi(a\cdot x)(x^*)=x^*(ax)=a\cdot x^*(x)=a\varphi(x)(x^*)$$

$$=(a\varphi(x))(x^*)$$

再证明φ是一一的，即$\mathrm{Ker}\varphi=0$。设$x\in\mathrm{Ker}\varphi$，则

$$\varphi(x)(x^*)=0,\quad \forall x^*\in V^*\Rightarrow x^*(x)=0,\quad \forall x^*\in V^*$$

$$\therefore x=0$$

最后证明φ是在上的。设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是V的一组基，$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$是V^*中的对偶基，任给$\bar{x}\in V^{**}$，命$\bar{x}(e_i^*)=a_i$，取$x=a_1e_1+\cdots+a_ne_n\in V$，对于$\forall x^*\in V^*$，设$x^*=x_1e_1^*+\cdots+x_ne_n^*$

$$\begin{aligned}x^*(x)&=a_1x^*(e_1)+\cdots+a_nx^*(e_n)\\&=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\\ \bar{x}(x^*)&=x_1\bar{x}(e_1^*)+\cdots+x_n\bar{x}(e_n^*)\\&=x_1a_1+\cdots+x_na_n\end{aligned}$$

所以$x^*(x)=\bar{x}(x^*)$，因此$\varphi(x)=\bar{x}$。命题证毕。‖

1.1.2 向量空间的张量积

1. 向量空间的张量积

设n维向量空间V，以$\{e_1,\cdots,e_n\}$为基，m维向量空间W，以$\{f_1,\cdots,f_m\}$为基。现以mn个元素$\{e_i\otimes f_j;\ i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m\}$为基，通过线性组合构成向量空间，记成$V\otimes W$，其中的加法运算即是使分量对应相加，数乘运算即是分别乘以每个分量。显然这是mn维向量空间，而且有自然同构$V\otimes W\cong R^{mn}$。

对于任何向量$v=\sum_{i=1}^{n}v_ie_i\in V$和$w=\sum_{j=1}^{m}w_jf_j\in W$，定义它们的张量积为

$$v\otimes w=\sum_{i,j}v_iw_je_i\otimes f_j\in V\otimes W$$

因此，我们也把向量空间$V\otimes W$称为向量空间V和W的张量积。

2. (r,s)型张量

给出n维向量空间V，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是V的一组基，V^*是V的对偶空间，它有对偶基$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$。考虑张量积

$$V_s^r = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\text{个}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s\text{个}}$$

它是一个n^{r+s}维向量空间，并有一组基底

$$\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{j_s}\}$$

其中 $i_1, \cdots, i_r, j_1, \cdots, j_s = 1, \cdots, n$

对于任何元素$T \in V_s^r$，它可以表示成

$$T = \sum_{i,j=1}^{n} T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \otimes e^*_{j_1} \otimes \cdots \otimes e^*_{j_s}$$

特别地

$$V_0^1 = V, \quad V_1^0 = V^*$$

我们把V_s^r中的元素称为**r阶逆变、s阶协变张量**，简称（r，s）型**张量**。V中元素称为**逆变向量**，V^*中的元素称为**协变向量**.

V^*的元素是线性映射$V \to R$，V的元素可看成线性映射$V^* \to R$，类似地，V_s^r的元素可以看成多线性映射。设$T \in V_s^r$，则映射

$$T: \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{个}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{s\text{个}} \to R$$

定义为

$$\begin{aligned} & T(v_1^*, \cdots, v_r^*, w_1, \cdots, w_s) \\ & = \sum_{i,j=1}^{n} T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} e_{i_1}(v_1^*) \cdots e_{i_r}(v_r^*) e^*_{j_1}(w_1) \cdots e^*_{j_s}(w_s) \end{aligned}$$

它显然是多线性的。特别地

$$T^{i_1 \cdots i_r}_{j_1 \cdots j_s} = T(e^*_{i_1}, \cdots, e^*_{i_r}, e_{j_1}, \cdots, e_{j_s})$$

如果另取V的一组基$\{f_1, \cdots, f_n\}$，在V^*中有对偶基$\{f_1^*, \cdots, f_n^*\}$，则有基变换公式

$$f_i = \sum_{j=1}^{n} a_i^j e_j, \qquad f_i^* = \sum_{j=1}^{n} b_j^i \cdot e_j^*, \qquad i = 1, 2, \cdots, n.$$

其中 $(b^i_j)^t=(a^j_i)^{-1}$. 设

$$T=\sum_{k,l=1}^{n} T'^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s} f_{k_1}\otimes\cdots\otimes f_{k_r}\otimes f^*_{l_1}\otimes\cdots\otimes f^*_{l_s}$$

则

$$T'^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}=T(f^*_{k_1},\cdots,f^*_{k_r},f_{l_1},\cdots,f_{l_s})$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n} b^{k_1}_{i_1}\cdots b^{k_r}_{i_r}a^{j_1}_{l_1}\cdots a^{j_s}_{l_s}T(e^*_{i_1},\cdots,e^*_{i_r},e_{j_1},\cdots,e_{j_s})$$

于是我们得到张量的分量的坐标变换公式

$$T'^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}=\sum_{i,j=1}^{n} b^{k_1}_{i_1}\cdots b^{k_r}_{i_r}a^{j_1}_{l_1}\cdots a^{j_s}_{l_s}T^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}$$

特别地，设 $v\in V$，$w\in V^*$，命

$$v=\sum_i v^i e_i=\sum_k v'^k f_k$$

$$w=\sum_j w_j e^*_j=\sum_l w'_l f^*_l$$

则有逆变向量和协变向量的分量的坐标变换公式

$$v'^k=\sum_i b^k_i v^i,\quad w'_l=\sum_j a^j_l w_j$$

3. 向量空间 $L(E,F)$

设 E 和 F 分别是 n 维和 m 维的向量空间，全体线性映射 f: $E\to F$ 所构成的集合记成 $L(E,F)$，在其中引进加法和数乘如下：设 f,g: $E\to F$ 是线性映射，定义

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall x\in E$$

$$(a\cdot f)(x)=a\cdot f(x),\ \forall x\in E,\ a\in R$$

则 $L(E,F)$ 是一向量空间。命 E^* 是 E 的对偶空间，则有同构

关系

$$L(E,F)\approx E^{*}\otimes F$$

证明：设 E 的一组基是 $\{e_1,\cdots,e_n\}$，E^{*} 中的对偶基是 $\{e_1^{*},\cdots,e_n^{*}\}$，$F$ 中一组基是 $\{f_1,\cdots,f_m\}$，任给线性映射 $f: E\to F$，命

$$f(e_i)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}f_j,\ (i=1,\cdots,n),\text{设}f'=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}e_i^{*}\otimes f_j\in$$

$E^{*}\otimes F$，则 φ: $f\mapsto f'$ 是 $L(E,F)$ 到 $E^{*}\otimes F$ 的同构。

因此 $L(E,F)=E^{*}\otimes F$ 是 mn 维向量空间，它的一组基是 $\{e_i^{*}\otimes f_j;\ i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m\}$。

1.1.8 欧氏空间和范数

1. 欧氏空间

设 E 是 n 维向量空间，定义双线性函数 φ: $E\times E\to R$:

$$\varphi(ax_1+bx_2,\ y)=a\varphi(x_1,\ y)+b\varphi(x_2,\ y)$$
$$\varphi(x,ay_1+by_2)=a\varphi(x,y_1)+b\varphi(x,y_2)$$

其中 $a,b\in R$，$x,x_1,x_2,y,y_1,y_2\in E$。如果这个双线性函数是对称和正定的，即

$$\varphi(x,\ y)=\varphi(y,\ x)$$

$\varphi(x,\ x)\geqslant 0$，而且 $\varphi(x,\ x)=0$ 当且仅当 $x=0$，则 $\varphi(x,y)$ 称为向量 x 和 y 的内积，记成 $(x,\ y)$ 或 $x\cdot y$，定义了内积的向量空间称为**欧氏空间**。

实例：n 维数空间 R^n 是欧氏空间，其中可以定义欧氏内积如下：

设 $x=(x^1,\cdots,x^n)$，$y=(y^1,\cdots,y^n)$，定义

$$x\cdot y=x^1y^1+\cdots+x^ny^n$$

命题 6 （Schwarz不等式） 对于欧氏空间 E 中任意向量 x 和 y，我们有不等式

$$x\cdot y\leqslant\sqrt{(x,\ x)(y,\ y)}$$

证明：对于任何实数 a，

$$0 \leqslant (x - ay, x - ay) = (x, x) - 2a(x, y) + a^2(y, y)$$

如果$y=0$，则不等式显然成立；如果$y \neq 0$，命 $a=\sqrt{(x,x)/(y,y)}$，则不等式也成立。‖

附记：要使 Schwarz 不等式中等号成立，必须有 $y=ax$ 或 $x=by$。

欧氏空间E中两向量x和y称为**正交的**，如果$x \cdot y=0$。E的子集A称为**标准正交的**，如果对于$\forall x \in A$，$x \cdot x=1$，对于$\forall x, y \in A$，$x \neq y$，$x \cdot y=0$，即A中不同的向量是正交的。

命题 7 n维欧氏空间中有标准正交基。

证明：E中存在一组基$\{f_1, \cdots, f_n\}$。首先取

$$e_1 = f_1/\sqrt{(f_1, f_1)}$$

然后用归纳法，假定在$\{f_1, \cdots, f_k\}$所张的E的子空间中标准正交基$\{e_1, \cdots, e_k\}$已作好，即

$$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1, \cdots, k)$$

命

$$y_{k+1} = f_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (f_{k+1}, e_i) e_i$$

则y_{k+1}分别与$e_1, \cdots, e_k$正交，然后命

$$e_{k+1} = y_{k+1}/\sqrt{(y_{k+1}, y_{k+1})}\ .\ \|$$

两个欧氏空间E和F称为**同构的**，如果存在向量空间同构

$$\varphi: E \to F$$

它保持内积不变，即对于$\forall x, y \in E$，$\varphi(x) \cdot \varphi(y) = x \cdot y$。

命题 8 两个n维欧空间是同构的。

证明：设E和F是n维欧氏空间，分别取E和F的标准正交基$\{e_1, \cdots, e_n\}$和$\{f_1, \cdots, f_n\}$，定义线性映射$\varphi: E \to F$使得$\varphi(e_i) = f_i$，$(i=1, \cdots, n)$ 则φ是向量空间同构。命$x, y \in E$，$x = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$，$y = y^1 e_1 + \cdots + y^n e_n$，则

$$\begin{aligned}\varphi(x)\cdot\varphi(y)&=\varphi(x^1e_1+\cdots+x^ne_n)\,\varphi(y^1e_1+\cdots+y^ne_n)\\&=(x^1f_1+\cdots+x^nf_n)(y^1f_1+\cdots+y^nf_n)\\&=x^1y^1+x^2y^2+\cdots+x^ny^n=x\cdot y\,\|\end{aligned}$$

2．范数

设V是n维向量空间，定义V上的正实值函数λ：$V\to R^+$使得对于$\forall\, x, y\in V$，

（a）$\lambda(x)\geqslant 0$，且如果$x\neq 0$，则$\lambda(x)>0$

（b）$\lambda(ax)=|a|\lambda(x)$，$\forall\, a\in R$

（c）$\lambda(x+y)\leqslant\lambda(x)+\lambda(y)$

则$\lambda(x)$称为向量x的**范数**，记成$|x|$或$\|x\|$，定义了范数的向量空间，称为**赋范向量空间**。

设E是n维欧氏空间，我们定义E上的正实值函数为：对于$\forall\, x\in E$

$$|x|=\sqrt{(x,x)}$$

容易看出，$|x|$是x的一种范数，称为欧氏范数，其中条件（c）得自Schwarz不等式

$$\begin{aligned}|x+y|^2&=(x+y)\cdot(x+y)=|x|^2+2(x,y)+|y|^2\\&\leqslant|x|^2+2|x||y|+|y|^2=(|x|+|y|)^2\end{aligned}$$

在赋范向量空间上我们可以定义任两向量x和y的距离：

$$d(x,y)=|x-y|$$

容易证明，这种定义的距离满足：

（a）$d(x,y)\geqslant 0$，而且$d(x,y)=0$当而仅当$x=y$

（b）$d(x,y)=d(y,x)$，（距离的对称性）

（c）$d(x,y)+d(y,z)\geqslant d(x,z)$，（三角不等式）。

特别地，对于n维数空间R^n，它的范数定义如下：命$x=(x^1,\cdots,x^n)$，则

$$|x|=\sqrt{(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2}$$

3．对偶空间的范数

设V是n维赋范向量空间，V^*是V的对偶空间，定义V^*中范数如下：设$x^*\in V^*$，命

$$|x^*|=\sup\{|x^*(x)|:\ x\in V,\ |x|\leqslant 1\}<+\infty$$

命题 9　$|x^*|$是V^*中的一个范数。

证明：只须证明$|x^*|$满足范数的条件：

(a) 因为$|x^*(x)|\geqslant 0$，所以$|x^*|\geqslant 0$；如果$|x^*|=0$，则对于$\forall x\in V$，$x^*(x)=0\Rightarrow x^*=0$。

(b) $|(ax^*)(x)|=|a||x^*(x)|\Rightarrow|ax^*|=|a||x^*|$

(c) 对于任意x^*，$y^*\in V^*$，

$$\begin{aligned}|x^*+y^*|&=\sup\{|(x^*+y^*)(x)|:\ x\in V,\ |x|\leqslant 1\}\\&\leqslant\sup\{|x^*(x)|+|y^*(x)|:\ x\in V,|x|\leqslant 1\}\\&\leqslant\sup\{|x^*(x)|:\ x\in V,\ |x|\leqslant 1\}\\&\quad+\sup\{|y^*(x)|:\ x\in V,\ |x|\leqslant 1\}\\&=|x^*|+|y^*|.\ \|\end{aligned}$$

若映射φ：$V\to V^{**}$定义为$\varphi(x)(x^*)=x^*(x)$，$\forall x\in V$，$x^*\in V^*$，则这个映射是保范的，即$|\varphi(x)|=|x|$。

如果E是n维欧氏空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是E的标准正 交基，对于任何$x\in V$，$x=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$，则有欧氏范数

$$|x|=\sqrt{(x,\ x)}=(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}$$

设E^*是E的对偶空间，$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$是E^*中的对偶基，在E^*中定义内积，使得

$$e_i^*\cdot e_j^*=\delta_{ij},\ (i,j=1,\cdots,n)$$

则对于任意x^*，$y^*\in E^*$，我们有

$$x^*=a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*$$

$$y^*=b_1e_1^*+\cdots+b_ne_n^*$$

$$x^*\cdot y^*=a_1b_1+\cdots+a_nb_n$$

E^*中的欧氏范数是

$$|x^*|=\sqrt{(x^*,\ x^*)}=(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}$$

命题10　n维欧氏空间E的对偶空间E^*也是n维欧氏

空间。

证明：只须证明上面定义的对偶空间E^*的范数与E^*的欧氏范数一致。为此，命$x=c_1e_1+\cdots+c_ne_n\in V$，$x^*=a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*\in V^*$，则

$$x^*(x)=(a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*)(c_1e_1+\cdots+c_ne_n)$$
$$=a_1c_1+\cdots+a_nc_n$$

根据Schwarz不等式

$$|x^*(x)|=\left|\sum_{i=1}^n a_ic_i\right|\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n c_i^2\right)^{1/2}$$

取$|x|=1$，则$c_1^2+\cdots+c_n^2=1$，所以

$$|x^*|=\sup\{|x^*(x)|;\ x\in V,\ |x|\leqslant 1\}\leqslant(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}$$

取适当的x使得$c_i=\lambda a_i$，其中$\lambda=1/(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}$，则Schwarz不等式变成等式，所以

$$|x^*|=(a_1^2+\cdots+a_n^2)^{1/2}=\sqrt{x^*\cdot x^*}$$

因此对偶空间E^*的范数$|x^*|$就是E^*的欧氏范数，这说明E^*是欧氏空间。‖

附记 类似于对偶空间的情形，我们可以定义空间$L(E,F)$的范数。设E,F是赋范向量空间，对于任何线性映射$f:E\to F$，我们定义它的范数是

$$|f|=\sup\{|f(x)|;\ x\in E,\ |x|\leqslant 1\}$$

当$F=R$时，这个范数重合于对偶空间的范数。

1.1.4 欧氏空间的子集

1. 开集和闭集

设E是n维欧氏空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是E的一组标准正交基，对于$\forall x\in E$

$$x=x^1e_1+\cdots+x^ne_n$$
$$|x|=[(x^1)^2+\cdots+(x^n)^2]^{1/2}$$

E中以x为中心$r>0$为半径的开实球是

$$S(x, r)=\{y \in E: |y-x|<r\}$$

闭实球是

$$\overline{S(x, r)}=\{y \in E: |y-x| \leqslant r\}$$

E的子集S称为**开集**，如果对于$\forall x \in S$，存在$r>0$使得$S(x, r) \subset S$。

命题11 开集的并集是开集，有限个开集的交集是开集.

证明：设S_α，$\alpha \in A$是E中的开集，命$S=\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$，则对于$\forall x \in S$，存在某$\alpha \in A$，$x \in S_\alpha$。因为$S_\alpha$是开集，所以存在$r>0$使得

$$S(x, r) \subset S_\alpha \subset S$$

因此$S=\bigcup_{\alpha \in A} S_\alpha$是开集。

再设$S=\bigcap_{i=1}^{m} S_i$，其中S_i是E的开集. 任给$x \in S$，则$x \in S_i$，$(i=1, \cdots, m)$，因为每一个S_i是开集，所以存在$r_i>0$使得$S(x, r_i) \subset S_i$，命$r=\min(r_1, \cdots, r_m)$，则$S(x, r) \subset S(x, r_i) \subset S_i$，所以

$$S(x, r) \subset \bigcap_{i=1}^{m} S_i$$

因此$S=\bigcap_{i=1}^{m} S_i$是开集. ‖

设S是E的子集，x称为S的**内点**，如果存在$r>0$使得$S(x, r) \subset S$。因此一个集是开集当且仅当它的每一个点是内点。

对于任意子集$S \subset E$，它的所有内点的集合称为S的**内部**。不难看出，S的内部是S的所有开子集的并集。

E的子集S称为**闭集**，如果$E-S$是开集。由命题11，立即推出

推论 闭集的交集是闭集；有限多个闭集的并集是闭集。

设S是E的子集，点$x\in E$称为S的**极限点**，如果对于每个$r>0$，$S\cap S(x, r)$是无限集。

命题12 子集$S\subset E$是闭集当而仅当S包含它的所有极限点。

证明：设S包含它的所有极限点，取$x\in E-S$，则存在$r>0$，使得$S\cap S(x, r)$不是无限集，即有限集$\{y_1, \cdots, y_k\}$，命

$$r'=\min\{r, |x-y_1|, \cdots, |x-y_k|\}$$

则$S\cap S(x, r')=\phi$，所以$S(x, r')\subset E-S$，即$E-S$是开集。

假定S有一极限点$x\in E-S$，则对每一$r>0$，$S\cap S(x, r)\neq\phi$，所以$E-S$不是开集，即S不是闭集。‖

对于任意子集$S\subset E$，所有包含S的闭集的交称为S的**闭包**，记成$\overline{S}$。容易证明：$x\in\overline{S}$当而仅当对每一$r>0$，$S\cap S(x, r)\neq\phi$。

易知：$\overline{S}=S\cup\{S$的极限点$\}$。

闭集的实例：

（1）闭实球$\overline{S(x, r)}$。

（2）闭长方体$I=\{x=x_1e_1+\cdots+x_ne_n: a_i\leqslant x_i\leqslant b_i, i=1, \cdots, n\}$。如果$b_i-a_i=r$，则$I$称为立方体，$r$称为它的边长。

2. 完备性和紧致性

n维欧氏空间E中一序列$\{x_k\}$称为Cauchy序列，如果对于任意$\varepsilon>0$，存在N，使得$m, k\geqslant N$时有$|x_m-x_k|<\varepsilon$。

设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是E中标准正交基，

$$x_k=x_k^1e_1+\cdots+x_k^ne_n, \quad k=1, 2, \cdots$$

则坐标序列$\{x_k^i\}$（$k=1, 2, \cdots$）也是Cauchy序列，因为

$$|x_m^i - x_k^i| \leqslant |x_m - x_k| < \varepsilon$$

反之，如果对于每一个 i，$\{x_k^i\}$，$(k=1, 2, \cdots)$ 是Cauchy序列

$$|x_m^i - x_k^i| < \frac{\varepsilon}{n}$$

则

$$|x_m - x_k| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_m^i - x_k^i| < \varepsilon$$

当E中的序列$\{x_k\}$，$(k=1, 2, \cdots)$ 是Cauchy序列时，坐标序列$\{x_k^i\}$，$(k=1, 2, \cdots)$ 是实的Cauchy序列，因此是收敛的。所以E中的Cauchy序列也是收敛的。这说明了：欧氏空间E是完备的。

从E的完备性可以推出以下推论：设

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots$$

是非空闭立方体的退缩序列，则集合 $\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \phi$。如果$I_k$的边长$r_k \to 0$，则

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \text{一点}$$

对于闭球序列也有同样的结论。

现在我们把以上结论推广如下：

命题18 设$F_1 \supset \cdots \supset F_k \supset \cdots$是$E$中非空闭集退缩序列，而且$F_1$有界，（即$F_1 \subset$某立方体$I$），则

$$F = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \phi$$

证明：设$n = \dim E$，$F_1 \subset I$，把I分为2^n个小立方体，每一小立方体边长是I边长$\frac{1}{2}$，则至少有一个小立方体与无限多

个F_k相交，由于F_k是退缩的，所以这个小立方体与所有F_k都相交。再把这个小立方体分成2^n个更小的立方体，这些更小的立方体每个边长为I的边长的$\frac{1}{4}$，这些更小的立方体中至少有一个与无限多个F_k相交，则它与所有F_k都相交；如此继续做下去，我们得到一个边长趋于0的退缩闭立方体序列

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_r \supset \cdots$$

对于每一个r，$I_r \cap F_k \neq \phi$。命

$$\bigcap_{r=1}^{\infty} I_r = \{x\}$$

任给$\varepsilon > 0$，存在r使得$S(x, \varepsilon) \supset I_r$，但$I_r \cap F_k \neq \phi$，所以$S(x, \varepsilon) \cap F_k \neq \phi$，因此$x$是所有$F_k$的极限点，因为$F_k$是闭集，所以$x$属于所有$F_k$，因此$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$，即$\bigcap_{k=1}^{\infty} F_k \neq \phi$。‖

推论 （Boljano-Weierstrass 定理） E中每一有界无限集S至少有一个极限点。

证明：$S \subset$某立方体I，用上述定理的方法，不断地把I一分为2^n，我们得到边长趋于0的闭立方体退缩序列

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_k \supset \cdots$$

使得$I_k \cap S =$无限集。命

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k = \{x\}$$

任给$\varepsilon > 0$，总存在某k使得$S(x, \varepsilon) \supset I_k$，所以

$$S(x, \varepsilon) \cap S \supset I_k \cap S = \text{无限集}$$

这说明：x是S的极限点。‖

引理 设G_a($a \in A$)是E的开集，则可以选其中可数个集合G_{a_i}($i = 1, 2, \cdots$)使得

$$\bigcup_{a\in A} G_a = \bigcup_{i=1}^{\infty} G_{a_i}$$

证明：E中的有理点是可数的。设$\bigcup\limits_{a\in A} G_a$中的有理点是$s_1, s_2, \cdots, s_i, \cdots$，对于某一个$s_i$，总存在$G_{a_i}$使得$s_i \in G_{a_i}$，求证：

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} G_{a_i} = \bigcup_{a\in A} G_a$$

因为G_{a_i}是开集，存在$\varepsilon_i > 0$使得$S(s_i, \varepsilon_i) \subset G_{a_i}$，但是有理点是稠密的，所以$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S(s_i, \varepsilon_i) \supset \bigcup\limits_{a\in A} G_a$，因此$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_{a_i} \supset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} S(s_i, \varepsilon_i) \supset \bigcup\limits_{a\in A} G_a$；另一方面，显然有$\bigcup\limits_{a\in A} G_a \supset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} G_{a_i}$，引理证毕。‖

定理（Borel覆盖定理）设F是欧氏空间E的有界闭集，G_a（$a \in A$）是E的一组开集，使得$\bigcup\limits_{a\in A} G_a \supset F$，则存在有限个$G_{a_i}$使得

$$F \subset \bigcup_{i=1}^{m} G_{a_i}$$

证明：根据上引理，A可以假定是可数集$\{1, \cdots, k, \cdots\}$，命

$$H_k = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_k, \quad k = 1, 2, \cdots$$

$S_k = F - H_k$，则S_k是闭集，而且有退缩序列

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k \supset \cdots$$

如果对于每一个k，$S_k \neq \phi$，则根据命题 13

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \neq \phi$$

即$F-\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k\neq\phi$，与假设$F\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}G_k$矛盾。所以存在某一$k$使得$S_{k+1}=\phi$，因此$F\subset H_k=\bigcup_{i=1}^{k}G_i$.‖

定义 E中的有界闭集称为紧致集。

命题14 设S是E中有界闭集，f：$S\to R$是S上的连续函数，并且$f(x)>0$，$\forall x\in S$，则存在$\alpha>0$，使得$f(x)>\alpha$，对于$\forall x\in S$。

证明：用反证法。假定结论不对，则对于每一k，存在$x_k\in S$使得$f(x_k)<\frac{1}{k}$。由于S是有界闭集，根据Boljano-Weierstrass定理，有界无限序列$\{x_k\}$有极限点$x\in S$，根据f在S上的连续性$f(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=0$，与假设矛盾。‖

利用这个事实，我们要证明，欧氏空间E中任何范数与欧氏范数等价。

范数引理 设$\|\ \|$是E中任意范数，$|\ |$是欧氏范数，则存在$K_1,K_2>0$，使得对于$\forall x\in E$，

$$\|x\|\leqslant K_1|x|,\quad |x|\leqslant K_2\|x\|$$

证明：设$\{e_1,\cdots,e_n\}$是E中的标准正交基，$x=x^1e_1+\cdots+x^ne_n$，则

$$\begin{aligned}\|x\|&=\|x^1e_1+\cdots+x^ne_n\|\leqslant|x^1|\,\|e_1\|+\cdots+|x^n|\,\|e_n\|\\&\leqslant n|x|\max\{\|e_1\|,\cdots,\|e_n\|\}=K_1|x|\end{aligned}$$

由此推出，$\|\ \|$是欧氏空间E上连续函数，命

$$S=\{x\in E;\ |x|=1\}$$

则S是E中有界闭集，由于$\|x\|>0$，根据上命题，对于$\forall x\in S$，存在$\alpha>0$使得

$$\|x\|>\alpha$$

对于$\forall x\in E$，$x\neq0$，则$\frac{x}{|x|}\in S$，所以$\left\|\frac{x}{|x|}\right\|>\alpha$，即

$$\|x\| > \alpha |x|, \text{ 或} |x| < \frac{1}{\alpha}\|x\| = K_2\|x\| \qquad \|$$

推论 E中根据范数$\|\ \|$或$|\ |$所得的开集是相同的。

证明：设G是E中由欧氏范数$|\ |$所确定的开集，对于$x\in G$，存在$r>0$使得$S(x,r)\subset G$，即$|y-x|<r$时$y\in G$。设$y\in E$并且$\|y-x\|<\frac{r}{K_2}$，根据上引理，$|y-x|<r$，则$y\in G$，所以G对于范数$\|\ \|$来说也是E中开集，反之亦然。$\|$

3．连通性

欧氏空间E中非空开集G是**连通的**，如果$G=M\cup N$时，其中M和N是E的非交开集，则$M=\phi$或$N=\phi$。

E中的非空开集G是**线性连通的**，如果对于G中任两不同点x和y，存在G中折线连结x和y。

命题15 E中连通的开集G一定是线性连通的。

证明：固定$x\in E$，我们把G中所有能与x用折线相连结的点的集记成S_x，则S_x一定是开集，因为设$y\in S_x\subset G$，G是开集，所以存在$r>0$使得$S(y,\varepsilon)\subset G$，但是$S(y,\varepsilon)$中的点都可以与$y$用线段相连结，因此这些点与$x$可以用折线相连结．$\therefore S(y,\varepsilon)\subset S_x$。

若$G-S_x\neq\phi$，设$z\in G-S_x$，则必存在球$S(z,r)\subset G-S_x$，因为不然的话，$S(z,r)\cap S_x\neq\phi$，则$z\in S_x$，矛盾，所以$G-S_x$是开集，但是这时

$$G=S_x\cup(G-S_x)$$

S_x和$G-S_x$都是开集，与G是连通的假设矛盾，故$G-S_x=\phi$，$S_x=G$。$\|$

§1.2 映射及其微分

1.2.1 连续映射

设E和F分别是n维和m维向量空间，G是E的子集，考虑

映射

$$f: G \to F$$

下面给出f的坐标表示。取E的一组基$\{e_1, \cdots, e_n\}$和F的一组基$\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_m\}$，则对于$\forall\ x \in E$，

$$x = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n$$

$$f(x) = \bar{x}^1 \bar{e}_1 + \cdots + \bar{x}^m \bar{e}_m$$

实数组$(x^1, \cdots, x^n)$是$x \in E$对于基$\{e_1, \cdots, e_n\}$的坐标，$(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m)$是$f(x) \in F$对于基$\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_m\}$的坐标。

映射$f: G \to F$，$x \mapsto \bar{x} = f(x)$的坐标表示是

$$(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m) = f(x^1, \cdots, x^n)$$
$$= (f_1(x^1, \cdots, x^n), \cdots, f_m(x^1, \cdots, x^n))$$

或
$$\begin{cases} \bar{x}^1 = f_1(x^1, \cdots, x^n) \\ \bar{x}^2 = f_2(x^1, \cdots, x^n) \\ \cdots\cdots \\ \bar{x}^m = f_m(x^1, \cdots, x^n) \end{cases}$$

因此映射$f: G \to F$相当于m个n元函数$f_i: G \to R$，$(i = 1, \cdots, m)$。

现在设E和F都是赋范向量空间，范数记成$|\ |$。映射$f: G \to F$称为在点$x \in G$是连续的，如果任给$\varepsilon > 0$，存在$\delta > 0$，使得$|x - y| < \delta$，$y \in G$时，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$。

如果映射$f: G \to F$在每一点$x \in G$都连续，则说f在G上连续。

下面设E和F是欧氏空间，我们有

命题1 f在点$x_0 \in G$的连续性与E和F的范数的选择无关。

证明：设f对于E和F的范数$|\ |$是连续的，命$\|\ \|$是E和F的另一范数，则存在$K > 0$使得

$$|x| \leqslant K \|x\|, \quad \forall\ x \in E$$

$$\|\bar{x}\| \leqslant K |\bar{x}|, \quad \forall\ \bar{x} \in F$$

已知 f 在点 $x_0\in G$ 对于范数$|\ |$连续，所以任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $|x_0-y|<\delta$ 时 $|f(x_0)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{K}$。如果 $\|x_0-y\|<\delta/K$，则有 $|x_0-y|<\delta$，所以 $|f(x_0)-f(y)|<\dfrac{\varepsilon}{K}$，因此 $\|f(x_0)-f(y)\|<\varepsilon$。‖

命题 2 映射 $f: G\to F$ 在 $x_0\in G$ 连续当而仅当函数 $f_i: G\to R$，$(i=1,\cdots,m)$ 在 $x_0\in G$ 连续。

证明：在 F 上取标准正交基 $\langle\bar{e}_1,\cdots,\bar{e}_m\rangle$，相应的坐标是 $(x^1,\cdots,x^m)$，对于每一点 $\bar{x}=(\bar{x}^1,\cdots,\bar{x}^m)\in F$，我们有欧氏范数

$$|\bar{x}|=[(\bar{x}^1)^2+\cdots+(\bar{x}^m)^2]^{1/2}$$

$$\max(|\bar{x}^1|,\cdots,|\bar{x}^m|)\leqslant|\bar{x}|\leqslant|\bar{x}^1|+\cdots+|\bar{x}^m|$$

如果映射 f：$G\to F$ 在 $x_0\in G$ 连续，则任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $|x_0-y|<\delta$ 时 $|f(x_0)-f(y)|<\varepsilon$，所以 $|f_i(x_0)-f_i(y)|\leqslant|f(x_0)-f(y)|<\varepsilon$，$(i=1,\cdots,m)$。这说明：函数组 $f_i: G\to R$，$(i=1,\cdots,m)$ 在 $x_0\in G$ 连续。

如果函数组 f_i：$G\to R$，$(i=1,\cdots,m)$ 在 $x_0\in G$ 连续，则任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$ 使得 $|x_0-y|<\delta$ 时 $|f_i(x_0)-f_i(y)|<\dfrac{\varepsilon}{m}$，所以

$$|f(x_0)-f(y)|\leqslant\sum_{i=1}^{m}|f_i(x_0)-f_i(y)|<\varepsilon$$

对于其它范数，可以用命题 1 来证明。‖

最后，我们再定义 f：$G\to F$ 的方向连续性。设 G 是 E 的开子集，f 称为在点 $x\in G$ 沿方向 $y\in E$ 连续，如果对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $|a|<\delta$ 时，有

$$|f(x+ay)-f(x)|<\varepsilon$$

但是，即使在点 $x\in G$ 映射 f 沿任意方向 $y\in E$ 是连续的，f 在点 x 并不一定连续。反例如下：设 E 是二维欧氏空间，对于

一组标准正交基的坐标为（x, y），$F=R$，考虑函数f：$E\to R$定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & \text{当 } x>0 \text{ 并且 } y=x^2\\ \dfrac{2}{x^2}\left(y-\dfrac{1}{2}x^2\right) & \text{当 } x>0 \text{ 并且 } \dfrac{1}{2}x^2<y<x^2\\ 0 & \text{当 } x>0 \text{ 并且 } y=\dfrac{1}{2}x^2\\ 0 & \text{当 } x>0 \text{ 并且 } y=2x^2\\ -\dfrac{1}{x^2}(y-2x^2) & \text{当 } x>0 \text{ 并且 } x^2<y<2x^2\\ 0 & \text{其它点}\end{cases}$$

则f除了（0，0）一点以外处处连续。但是在点（0，0），$f(0,0)=0$；任给$\delta>0$，总存在一点（x，y），$|(x,y)-(0,0)|=\sqrt{x^2+y^2}<\delta$，$|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|=1$，所以函数$f(x,y)$在（0，0）点不连续。可是$f$在（0，0）点沿任何方向都连续，因为沿任何方向，总有一个$\delta>0$，使得该方向上满足$\sqrt{x^2+y^2}<\delta$的点都有

$$|f(x,y)-f(0,0)|=|f(x,y)|=0$$

1.2.2 微分的定义

先回忆一元函数的情形。设G是R中一开区间，考虑函数f：$G\to R$，这个函数称为在点$a\in G$是可微的，如果存在实数λ使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(a+h)-f(a)]=\lambda$$

或

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[f(a+h)-f(a)-\lambda h]=0$$

我们把λ记成$f'(a)$，称为函数f在a点的导数。

把上述概念推广，就得到映射f：$G\to F$在点$a\in G$可微的

概念。

设E和F分别是n维和m维的赋范向量空间，G是E的开子集，映射$f: G\to F$称为在点$a\in G$是**可微的**，如果存在线性映射$\lambda\in L(E,F)$，使得对于$\forall\ a\in G$满足

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|}{|h|}=0$$

其中线性变换λ称为映射f在a点的**导数**，记成$Df(a)$。

如果映射$f: G\to F$在每一点$x\in G$可微，则得到映射

$$Df: G\to L(E,F),\quad x\mapsto Df(x)\in L(E,F)$$

命题 3 如果映射f在点x可微，则对于$\forall\ y\in E$，有

$$[Df(x)](y)=\lim_{a\to 0}\frac{f(x+ay)-f(x)}{a},\quad a\in R$$

证明：根据$Df(x)$的定义

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)|}{|h|}=0$$

命$h=ay$，则有

$$\lim_{a\to 0}\frac{|f(x+ay)-f(x)-aDf(x)(y)|}{a}=0$$

$$\therefore Df(x)(y)=\lim_{a\to 0}\frac{f(x+ay)-f(x)}{a}.\|$$

命题 4 如果映射$f: G\to F$在点$a\in G$可微，则导数是唯一的。

证明：设另有线性变换$\mu\in L(E,F)$，使得

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(a+h)-f(a)-\mu(h)|}{|h|}=0$$

则

$$0 \leqslant \lim_{h \to 0} \frac{|\lambda(h)-\mu(h)|}{|h|}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{|\lambda(h)-f(a+h)+f(a)+f(a+h)-f(a)-\mu(h)|}{|h|}$$

$$\leqslant \lim_{h \to 0} \frac{|\lambda(h)-f(a+h)+f(a)|}{|h|}$$

$$+ \lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-\mu(h)|}{|h|} = 0$$

$$\therefore \quad \lim_{h \to 0} \frac{|\lambda(h)-\mu(h)|}{|h|} = 0$$

取 $h = tx$，$x \neq 0$，使 $t \to 0$，则有

$$0 = \lim_{h \to 0} \frac{|\lambda(h)-\mu(h)|}{|h|} = \lim_{t \to 0} \frac{|\lambda(tx)-\mu(tx)|}{|tx|}$$

$$= \frac{|\lambda(x)-\mu(x)|}{|x|}$$

$$\therefore \quad \lambda(x) = \mu(x). \|$$

我们可以利用范数引理证明：映射 $f: G \to F$ 的微分定义与 E 和 F 中范数的选择无关。

实例 设 $E = R^2$，$F = R$，$f: R^2 \to R$ 定义为 $f(x, y) = \sin x$，求证线性变换 $Df(a, b) = \lambda$，$\lambda(x, y) = (\cos a) \cdot x$。

证明：

$$\lim_{(h,k) \to 0} \frac{|f(a+h, b+k)-f(a, b)-\lambda(h, k)|}{|(h, k)|}$$

$$= \lim_{(h,k) \to 0} \frac{|\sin(a+h)-\sin a-(\cos a)h|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

已知$\sin'(a)=\cos a$，根据一元函数导数的定义，

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\sin(a+h)-\sin a-(\cos a)\cdot h|}{|h|}=0$$

因为$\sqrt{h^2+k^2}>|h|$，所以

$$\lim_{\sqrt{h^2+k^2}\to 0}\frac{|\sin(a+h)-\sin a-(\cos a)\cdot h|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0。$$

下面证明：可微性包含连续性。

命题 5 给出映射$f:G\to F$，G是E的开子集，如果f在点$x\in G$可微，则f在点x连续。

证明：

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-\lambda(h)|}{|h|}=0$$

$$|f(x+h)-f(x)|-|\lambda(h)|$$

$$\leqslant|f(x+h)-f(x)-\lambda(h)|<\varepsilon|h|<|h|$$

但是$\lambda\in L(E,F)$是线性变换，所以总存在$K>0$使得$|\lambda(h)|\leqslant K|h|$

$$\therefore |f(x+h)-f(x)|<(K+1)|h|$$

因此映射f在点$x\in G$连续。‖

下面我们将给出$Df(x)$的坐标表示。

设E是n维赋范空间，$\{e_1,\cdots,e_n\}$是E一组基，$F=R$，则$E^*=L(E,R)$。再设$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$是E^*中的对偶基。

设G是E的开子集，给出映射$f:G\to F$，再设f在点$x\in G$可微，则$Df(x)\in L(E,R)=E^*$，所以可命$Df(x)=a_1e_1^*+\cdots+a_ne_n^*$，因为$\{e_1^*,\cdots,e_n^*\}$是$\{e_1,\cdots,e_n\}$的对偶基，则有$e_i^*(e_j)=\delta_{ij}$。由此推出：$Df(x)(e_i)=a_i$，所以

$$Df(x)=\sum_{i=1}^{n}[Df(x)](e_i)e_i^*$$

如果E中对应于基$\{e_1, \cdots, e_n\}$的坐标是$(x^1, \cdots, x^n)$，在1.2.4中我们将指出：

$$Df(x)(e_i)=\frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (i=1, \cdots, n)$$

再考虑一般F的情形。在1.2.1中我们已指出：映射$f: G\to R$对应于m个函数$f_i: G\to R(i=1, \cdots, m)$。

命题 6 映射$f: G\to F$在点$x\in G$可微，当且仅当函数组$f_i: G\to R$，$(i=1, \cdots, m)$在点$x\in G$可微，而且$Df(x)=(Df_1(x), \cdots, Df_m(x))$。

证明：在F中取一组基$\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_m\}$，相应的坐标是$(\bar{x}^1, \cdots, \bar{x}^m)$，定义$F$中的范数为$\|\bar{x}\|=\sum_{i=1}^{m}|\bar{x}^i|$，根据范数引理，存在$K>0$使得

$$\|\bar{x}\|\leqslant K|x|$$

$$\begin{aligned}0&\leqslant|f_i(x+h)-f_i(x)-Df_i(x)|\\&\leqslant\|f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)\|\\&\leqslant K|f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)|\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{h\to 0}\frac{|f_i(x+h)-f_i(x)-Df_i(x)(h)|}{|h|}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)|}{|h|}=0$$

因此$f_i(x)$在$x\in G$可微$(i=1, \cdots, m)$，导数是$Df_i(x)$。

反之，设f_i在$x\in G$可微$(i=1, \cdots, m)$，并且导数是$Df_i(x)$，则

$$\|f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)\|=\sum_{i=1}^{m}|f_i(x+h)-f_i(x)-Df_i(x)(h)|$$

所以当

$$\lim_{h\to 0}\frac{|f_i(x+h)-f_i(x)-Df_i(x)(h)|}{|h|}=0,$$

$$(i=1,\cdots,m)$$

时，

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)\|}{\|h\|}=0. \|$$

$Df(x)$ 的坐标表示是

$$Df(x)=\sum_{i=1}^{m}Df_i(x)\bar{e}_i=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(Df_i(x)(e_j))$$

$$\times\bar{e}_j\otimes\bar{e}_i$$

换言之，$Df(x)$：$E\to F$的表示矩阵是

$$f'(x)=\begin{pmatrix}Df_1(x)(e_1) & \cdots\cdots & Df_1(x)(e_n)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ Df_m(x)(e_1) & \cdots\cdots & Df_m(x)(e_n)\end{pmatrix}$$

这个矩阵称为映射$f:G\to F$在点$x\in G$的Jacobian矩阵。在1.2.4中我们将指出

$$Df_i(x)(e_j)=\frac{\partial f_i(x)}{\partial x^j}$$

$$\therefore f'(x)=\left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x^j}\right)$$

1.2.3 微分的基本性质

定理 1 （链法则） 设映射$f:G\to F$在$a\in G$可微，映射$g:F\to H$在$f(a)\in f(G)$可微，则$g\circ f:G\to H$在$a\in G$可微，并且

$$D(g\circ f)(a)=Dg(f(a))\circ Df(a)$$

特别地，当$E=F=H=R$时，这就是一元复合函数的导数公式。

证明：命$b=f(a)$，$\lambda=Df(a)$，$\mu=Dg(f(a))$，定义

$$\varphi(h)=f(a+h)-f(a)-\lambda(h)$$

$$\psi(k)=g(b+k)-g(b)-\mu(k)$$
$$\rho(h)=g\circ f(a+h)-g\circ f(a)-\mu\circ\lambda(h)$$

现在已知

$$\lim_{h\to 0}\frac{|\varphi(h)|}{|h|}=0,\quad \lim_{k\to 0}\frac{|\psi(k)|}{|k|}=0$$

只需证明 $\lim_{h\to 0}\frac{|\rho(h)|}{|h|}=0$

证明：$\rho(h)=g(f(a+h))-g(b)-\mu\circ\lambda(h)$

$$=g(f(a+h))-g(b)-\mu(f(a+h)-f(a)-\varphi(h))$$
$$=[g(b+k)-g(b)-\mu(f(a+k)-f(a))]+\mu[\varphi(h)]$$
$$=\psi[f(h)]+\mu[\varphi(h)]$$

因此问题转化为求证：

$$\lim_{h\to 0}\frac{\psi[f(a+h)-f(a)]}{|h|}=0,\quad \lim_{h\to 0}\frac{|\mu[\varphi(h)]|}{|h|}=0$$

已知 $k\to 0$ 时 $\frac{|\psi(k)|}{|k|}\to 0$，所以任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得 $|f(a+h)-b|=|f(a+h)-f(a)|=k<\delta$ 时

$$|\psi(k)|<\varepsilon|f(a+h)-f(a)|$$
$$=\varepsilon|\varphi(h)+\lambda(h)|\leqslant\varepsilon|\varphi(h)|+\varepsilon\cdot M\cdot(h)$$
$$\therefore\quad \frac{|\psi(k)|}{|h|}\leqslant\varepsilon\frac{|\varphi(h)|}{|h|}+\varepsilon M$$

另一方面，μ 是线性变换，

$$\frac{|\mu[\varphi(h)]|}{|h|}\leqslant M'\frac{|\varphi(h)|}{|h|}$$

定理证毕。‖

命题 7 （1）如果 $f:G\to F$ 是常函数，则 $Df(x)=0$，$\forall x\in G$

（2）如果$f\in L(E, F)$，则$Df(x)=f$，$\forall x\in E$。

（3）函数$s: R^2\to R$定义为$s(x, y)=x+y$，则

$$Ds(x, y)=s$$

（4）函数$p: R^2\to R$定义为$p(x, y)=x\cdot y$，则

$$(Dp(x, y))(u, v)=yu+xv$$

证明：

（1）$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-0|}{|h|}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{|h|}=0$$

（2）$$\lim_{h\to 0}\frac{|f(x+h)-f(x)-f(h)|}{|h|}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{|f(x)+f(h)-f(x)-f(h)|}{|h|}=0$$

（3）得自（2）。

（4）$$\frac{|hk|}{|(h, k)|}\leqslant\frac{\frac{1}{2}(h^2+k^2)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{h^2+k^2}$$

$$\lim_{(h, k)\to 0}\frac{|p(x+h, y+k)-p(x, y)-Dp(x, y)(h, k)|}{|(h, k)|}$$

$$=\lim_{(h, k)\to 0}\frac{|(x+h)(y+k)-xy-yh-xk|}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\lim_{(h, k)\to 0}\frac{|hk|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0 \quad \|$$

推论 如果$f, g: G\to R$在点$x\in G$可微，则

$$D(f+g)(x)=Df(x)+Dg(x)$$

$$D(fg)(x)=g(x)Df(x)+f(x)Dg(x)$$

此外，如果$g(x)\neq 0$，则

$$D\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{g(x)\cdot Df(x)-f(x)Dg\cdot(x)}{[g(x)]^2}$$

证明：根据定理1和命题7的（3）和（4），

$$\begin{aligned}D(f+g)(x)&=D[s(f,\ g)](x)\\&=Ds[f(x),\ g(x)]\circ D(f,\ g)(x)\\&=s\circ D(f,\ g)(x)=s[Df(x),\ Dg(x)]\\&=Df(x)+Dg(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D(f\cdot g)(x)&=D[p(f,g)](x)\\&=Dp[f(x),\ g(x)]\circ D(f,g)(x)\\&=Dp[f(x),g(x)]\circ[Df(x),Dg(x)]\\&=g(x)\cdot Df(x)+f(x)\cdot Dg(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Df(x)&=D(f/g\cdot g)(x)\\&=g(x)D(f/g)(x)+\frac{f(x)}{g(x)}Dg\cdot(x)\end{aligned}$$

$$\therefore D(f/g)(x)=\frac{g(x)Df(x)-f(x)Dg(x)}{[g(x)]^2}$$ ‖

1.2.4 偏导数和C^1类映射

设G是向量空间E的开集，$\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}$是E中一组基，$(x^1,\ \cdots,\ x^n)$是相应的坐标。考虑函数f：$G\to R$，设它在点$a\in G$可微。

定义

$$Df(a)(e_i)=D_if(a)=\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$$

命题 8

$$Df(a)(e_i)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+he_i)-f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a^1, \cdots, a^i + h, \cdots, a^n) - f(a^1, \cdots, a^n)}{h}$$

证明：得自1.2.2命题3。‖

附记 $\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$ 的上述定义符合经典微积分中偏导数的定义。

命题9 设函数 f：$G \to R$ 在 $a \in G$ 取极值，并且 $\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)$ 存在，则

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = 0$$

证明：命 $g_i(x) = f(a^1, \cdots, \overset{(i)}{x}, \cdots, a^n)$，则函数 $g_i(x)$ 在 $x = a^i$ 时取极值，所以

$$g_i'(a) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) = 0 \quad \|$$

命题10 如果映射 f：$G \to F$ 在 $a \in G$ 可微，则 $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a)$ 存在，($i = 1, \cdots, m$；$j = 1, \cdots, n$) 并且

$$f'(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a)\right)$$

证明：先设 $F = R$，考虑映射 f：$G \to R$，在 E 中引进坐标以后，此映射可看成函数 f：$R^n \to R$，定义映射 h：$R^n \to R$ 为

$$h(x) = (a^1, \cdots, \overset{(j)}{x}, \cdots, a^n)$$

则组合映射 $f \circ h$ 是一元函数 $R \to R^n \to R$，根据经典的偏导数定义，

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}(a) = (f \circ h)'(a^j) = D(f \circ h)(a^j)$$

再根据定理 1

$$D(f\circ h)(a^j)=Df(h(a^j))\circ Dh(a^j)=Df(a)\cdot\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(j)$$

$=f'(a)$ 的第 j 个元素。

所以 $\frac{\partial f}{\partial x^j}(a)$ 是 f 的 Jacobian 矩阵 $f'(a)$ 的第 j 个元素，它是存在的，即

$$f'(a)=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(a),\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x^n}(a)\right)$$

再考虑一般情形，$f: G\to F$，根据1.2.2命题 5，$Df(x)=(Df_1(x),\ \cdots,\ Df_m(x))$，所以它的矩阵表示是

$$f'(a)=\begin{pmatrix}f_1'(a)\\ \vdots\\ f_i'(a)\\ \vdots\\ f_m'(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x^1}(a), & \cdots\cdots\frac{\partial f_1}{\partial x^n}(a)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial f_i}{\partial x^1}(a), & \cdots\cdots\frac{\partial f_i}{\partial x^n}(a)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x^1}(a), & \cdots\cdots\frac{\partial f_m}{\partial x^n}(a)\end{pmatrix}$$

命题11 给出映射 $f: G\to F$，设 $\frac{\partial f_i}{\partial x^j}$（$i=1,\ \cdots,m$；$j=1,\ \cdots,\ n$）在 $a\in G$ 的邻域内存在并且在 a 点连续，则 $Df(a)$ 存在。

证明：根据1.2.2命题 6，只需考虑 $m=1$ 的情形，即函数 $f: G\to R$。

$$f(a+h)-f(a)=\sum_{i=1}^{n}[f(a_1+h_1,\ \cdots\cdots,a_i+h_i,\ a_{i+1},\ \cdots,\ a_n)-f(a_1+h_1,\cdots,a_{i-1}+h_{i-1},\ a_i,\ a_{i+1},\ \cdots,\ a_n)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(a_1+h_1, \cdots, a_{i-1}+h_{i-1}, \xi_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(c)$$

其中ξ_i界于a_i和a_i+h_i之间，$c=(a_1+h_1, \cdots, a_{i-1}+h_{i-1}, \xi_i, a_{i+1}, \cdots, a_n)$，

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)|}{|h|}$$

$$= \lim_{h\to 0} |f(a+h)-f(a)-\sum_{i=1}^{n} D_i f(a)(h_i)| \Big/ |h|$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lim_{h\to 0} \frac{\left|\frac{\partial f}{\partial x^i}(c)-\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\right| |h_i|}{|h|}$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \lim_{h\to 0} \left|\frac{\partial f}{\partial x^i}(c)-\frac{\partial f}{\partial x^i}(a)\right| = 0$$

所以$Df(a)$存在并且等于$(D_1 f(a), \cdots, D_n f(a)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(a), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x^n}(a)\right)$‖

定义 如果对于映射f：$G\to F$，$\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(a)$，$(i=1, \cdots, m; j=1, \cdots, n)$在点$a\in G$的邻域存在并且在$a$点连续，则我们说映射$f$在点$a\in G$是连续可微的，如果$f$在$G$的每一点处都连续可微，则我们说$f$是$G$上的$C^1$类映射。

命题12 设函数$g_1, \cdots, g_m$：$G\to R$在点$a\in G$连续可微，并且f：$R^m\to R$在$(g_1(a), \cdots, g_m(a))$连续可微，定义复合函数F：$G\to R^m\to R$为$F(x)=f[g_1(x), \cdots, g_m(x)]$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x^j}(g_1(a), \cdots, g_m(a))\frac{\partial g_j}{\partial x^i}(a)$$

证明：根据上面的命题，连续可微性承认可微性，再根据定理

$$F'(a)=f'(g(a))\,g'(a)$$

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x^1}(g(a)),\ \cdots,\ \frac{\partial f}{\partial x^m}(g(a))\right)$$

$$\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x^1}(a), & \cdots, & \frac{\partial g_1}{\partial x^n}(a) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x^1}(a), & \cdots, & \frac{\partial g_m}{\partial x^n}(a) \end{pmatrix}$$

但是 $F'(a)=\left(\frac{\partial F}{\partial x^1}(a),\ \cdots,\ \frac{\partial F}{\partial x^n}(a)\right)$，所以

$$\frac{\partial F}{\partial x^i}(a)=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial x^j}(g(a))\frac{\partial g_j}{\partial x^i}(a)\quad \|$$

实例：函数 F：$R^2\to R$ 定义为

$$F(x,\ y)=f[g(x,\ y),\ h(x),\ k(y)]$$

其中 g：$R^2\to R$，h,k：$R\to R$，f：$R^3\to R$ 分别为已知函数，求 F 的偏导数。

解：定义函数 $\bar{h}$，$\bar{k}$：$R^2\to R$ 为

$$\bar{h}(x,\ y)=h(x),\ \bar{k}(x,\ y)=k(y)$$

则 $\frac{\partial\bar{h}}{\partial x}=h'(x)$，$\frac{\partial\bar{h}}{\partial y}=0$，$\frac{\partial\bar{k}}{\partial x}=0$，$\frac{\partial\bar{k}}{\partial y}=k'(y)$

$$F(x,\ y)=f(g(x,\ y),\ \bar{h}(x,\ y),\ \bar{k}(x,\ y))$$

$$\therefore\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^1}\ \frac{\partial g(x,\ y)}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^2}\ \frac{\partial \bar{h}(x,\ y)}{\partial x} \\ \qquad +\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^3}\ \frac{\partial \bar{k}(x,\ y)}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^1}\ \frac{\partial g(x,y)}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^2}\ \frac{\partial \bar{h}(x,y)}{\partial y} \\ +\frac{\partial f}{\partial \bar{x}^3}\ \frac{\partial \bar{k}(x,\ y)}{\partial y} \end{cases}$$

则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^1} \dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^2} \dfrac{\partial h}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^1} \dfrac{\partial g}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial \bar{x}^3} \dfrac{\partial k}{\partial y} \end{cases}$$

1.2.5 高阶微分和Taylor公式

1. 高阶微分

设E是n维向量空间，$\{e_1, \cdots, e_n\}$是E的一组基，相应的坐标是（$x^1, \cdots, x^n$），F是m维向量空间，$\{\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_m\}$是$F$的一组基，相应的坐标是$(\bar{x}_1, \cdots, \bar{x}^m)$。命$G$是$E$的开集，给出$C^1$类映射

$$f: G \to F$$

它的坐标表示是

$$\begin{cases} \bar{x}^1 = f_1(x^1, \cdots, x^n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \bar{x}^m = f_m(x^1, \cdots, x^n) \end{cases}$$

它的导数$Df(x)$的矩阵表示为$f'(x)$，即映射的Jacobiau矩阵是

$$f'(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x^1}(x), & \cdots, & \dfrac{\partial f_1}{\partial x^n}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x^1}(x), & \cdots, & \dfrac{\partial f_m}{\partial x^n}(x) \end{pmatrix}$$

映射$f: G \to F$的微分定义了映射

$$Df: G \to L(E, F) \cong E^* \otimes F$$

其中E^*是E的对偶空间，它有对偶基$\{e_1^*, \cdots, e_n^*\}$，因此$E^* \otimes F$有一组基$e_i^* \otimes e_j$，（$i = 1, \cdots, n$；$j = 1, \cdots, m$），则

$$Df(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j(x)}{\partial x^i} e_i^* \otimes \bar{e}_j$$

假设映射Df在G上可微，它的微分$D^2 f = D(Df)$称为映射

f: $G\to F$ 的二阶微分，这是映射

$$D^2f: G\to L(E, L(E, F))\cong E^*\otimes E^*\otimes F$$

$$D^2f(x)=\sum_{i, k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{\partial f_j}{\partial x^i}(x)\right)e_k^*\otimes e_i^*\otimes \bar{e}_j$$

定义 如果对于映射 $f: G\to F$，偏导数 $\frac{\partial^2 f_j}{\partial x^k\partial x^i}(a)$，$(j=1, \cdots, m; i, k=1, \cdots, n)$ 在点 a 的邻域中存在并在 a 点连续，则我们说映射 f 在点 a 是二次连续可微的；如果映射 f 在 G 的每一点处都是二次连续可微的，则我们说 f 是 G 上的 C^2 类映射。

定理 2 如果 $f: G\to R$ 是 C^2 类函数，则对于 $\forall x_0\in G$ 有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(x_0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^j\partial x^i}(x_0)$$

证明：只需考虑 G 是 R^2 的情形。命 $x^i=x$，$x^j=y$，设 $(x_0, y_0)\in G$ 并且 $[x_0, x_0+h]\times[y_0, y_0+k]\subset G$，考虑二阶差分

$$\frac{1}{hk}\{[f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0, y_0+k)]$$
$$-[f(x_0+h, y_0)-f(x_0, y_0)]\}$$

根据中值定理，存在 ξ 介于 x_0 和 x_0+h 之间使得上式等于

$$\frac{1}{k}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0+k)-\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)\right]$$

再用中值定理，存在 η 介于 y_0 和 y_0+k 之间使得上式等于 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(\xi, \eta)$，所以当 $h\to 0$，$k\to 0$ 时，上述差分趋于 $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x_0, y_0)$。

把上述差分改写一下

$$\frac{1}{hk}\{[f(x_0+h, y_0+k)-f(x_0+h, y_0)]$$
$$-[f(x_0, y_0+k)-f(x_0, y_0)]\}$$

则分别存在 ξ' 和 η' 介于 x_0 和 x_0+h 与 y_0 和 y_0+k 之间使得上式

等于$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\xi', \eta')$，当$h \to 0$，$k \to 0$时，它趋于$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (x_0, y_0)。

$$\therefore \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \|$$

类似地，我们可以定义三阶微分$D^3 f = D(D^2 f)$，它是映射

$$D^3 f: G \to L(E, L(E, L(E, F))) \cong E^* \otimes E^* \otimes E^* \otimes F$$

2. Taylor公式

先复习一元函数$f: R \to R$的Taylor公式。设f是$k+1$次可微的，则对于x，$y \in R$，存在x和y之间一点ξ使得

$$f(y) = f(x) + (y-x)f'(x) + \cdots + \frac{(y-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) + \frac{(y-x)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(\xi)$$

证明：造闭区间$[x, y]$上的实函数

$$\begin{aligned} F(t) = {} & f(y) - f(t) - (y-t)f'(t) - \cdots \\ & - \frac{(y-t)^k}{k!} f^{(k)}(t) - \frac{(y-t)^{k+1}}{(k+1)!} \\ & \times \Big[f(y) - f(x) - f'(x)(y-x) - \cdots - \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \\ & \times (y-x)^k \Big] \frac{(k+1)!}{(y-x)^{k+1}} \end{aligned}$$

$F(x) = F(y) = 0$，根据Rolle定理，存在$\xi \in (x, y)$使得$F'(\xi) = 0$，即

$$\begin{aligned} 0 = {} & -\frac{f^{(k+1)}(\xi)(y-\xi)^k}{k!} + \frac{(y-\xi)^k}{k!} \\ & \times \Big[f(y) - f(x) - \cdots\cdots - \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(y-x)^k \Big] \\ & \cdot \frac{(k+1)!}{(y-x)^{k+1}} \end{aligned}$$

或

$$f(y)=f(x)+(y-x)f'(x)+\cdots$$
$$+\frac{(y-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)+\frac{(y-x)^{k+1}}{(k+1)!}f^{(k+1)}(\xi) \qquad \|$$

推广到多元函数的情形．给出函数$f: G\to R$，它在G上是$k+1$次可微的，任给x，$y\in G$，设G是凸的，即连结x和y的线段$\subset G$，定义一元函数$g(t)$如下

$$g(t)=f[x^1+t(y^1-x^1),\ \cdots,\ x^n+t(y^n-x^n)]$$

其中$(x^1,\ \cdots,\ x^n)$和$(y^1,\ \cdots,\ y^n)$分别为x和y的坐标，计算$g(t)$的各阶导数，我们得到

$$g'(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}[x+t(y-x)](y^i-x^i)$$

$$g''(t)=\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}[x+t(y-x)](y^i-x^i)(y^j-x^j)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g^{(k)}(t)=\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}}[x+t(y-x)]$$
$$\times(y^{i_1}-x^{i_1})\cdots(y^{i_k}-x^{i_k})$$

$$g^{(k+1)}(t)=\sum_{i_1,\cdots,i_{k+1}=1}^{n}\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{k+1}}}[x+t(y-x)]$$
$$\times(y^{i_1}-x^{i_1})\cdots(y^{i_{k+1}}-x^{i_{k+1}})$$

根据一元函数 Taylor公式得到

$$g(1)=g(0)+g'(0)+\frac{1}{2!}g''(0)+\cdots$$
$$+\frac{1}{k!}g^{(k)}(0)+\frac{1}{(k+1)!}g^{(k+1)}(\tau)$$

其中$0<\tau<1$．把$g(t)$的各阶导数代入后得到

定理 3（多元函数的 Taylor 公式）设函数$f: G\to R$在G上是$k+1$次可微的，G是E中一凸集，任给x，$y\in G$，存在连

续 x 和 y 的线段上一点ξ使得

$$f(y)=f(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}(y^i-x^i)$$

$$+\frac{1}{2!}\sum_{i,\ j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^i\partial x^j}(y^i-x^i)(y^j-x^j)+\cdots$$

$$+\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n}\frac{\partial^k f(x)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_k}}(y^{i_1}-x^{i_1})\cdots(y^{i_k}-x^{i_k})$$

$$+\frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1,\cdots,i_{k+1}=1}^{n}\frac{\partial^{k+1} f(\xi)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{k+1}}}(y^{i_1}-x^{i_1})\cdots(y^{i_{k+1}}-x^{i_{k+1}})$$

推论 命

$$R(x,\ y)=\frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1,\cdots,i_{k+1}=1}^{n}\frac{\partial^{k+1} f(\xi)}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{k+1}}}$$

$$(y^{i_1}-x^{i_1})\cdots(y^{i_{k+1}}-x^{i_{k+1}})$$

如果 f： $G\to R$ 是 C^{k+1} 类的，则有

$$\lim_{|y-x|\to 0}\frac{|R(x,\ y)|}{|y-x|^k}=0$$

证明：因为 f 是 C^{k+1} 类函数，所以存在 $r>0$，使得 $|y-x|<r$ 时

$$\left|\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x^{i_1}\cdots\partial x^{i_{k+1}}}(y)\right|<M$$

$$\therefore\quad |R(x,\ y)|\leqslant M\sum_{i_1,\cdots,i_{k+1}=1}^{n}|y^{i_1}-x^{i_1}|\cdots|y^{i_{k+1}}-x^{i_{k+1}}|$$

$$\leqslant Mn^{k+1}|y-x|^{k+1}$$

因此

$$\lim_{|y-x|\to 0}\frac{|R(x,\ y)|}{|y-x|^k}=0$$

1.2.6 逆函数和隐函数

1. 逆函数定理

先复习一元函数的情形。给出 C^1 类函数 f：$G\to R$，G是R中的开集，$a\in G$，$f'(a)\neq 0$，若$f'(a)>0$，则存在a的邻域$V\subset G$使得$f'(x)>0$，$\forall x\in V$；若$f'(a)<0$，则$f'(x)<0$，$\forall x\in V$。于是f在V上是一一的，因此存在包含$f(a)$的开集W使得f^{-1}在W上定义，此外f^{-1}也是C^1类的，而且

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'[f^{-1}(y)]},\quad \forall y\in W$$

现在把以上结果推广到高维的情形。

引理 设$A\subset R^n$是一长方体，并设f：$A\to R^n$是C^1类映射。如果存在一正数M使得$|D_jf_i(x)|\leqslant M$，对于$\forall x\in A$，则有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant n^2M|x-y|，对于\ \forall x,\ y\in A$$

证明：$f_i(y)-f_i(x)=\sum\limits_{j=1}^{n}(y^j-x^j)D_jf_i(\xi)$，其中$\xi$位于连结$x$和$y$的线段上，已知$|D_jf_i(\xi)|\leqslant M$，所以

$$|f_i(y)-f_i(x)|\leqslant\sum_{j=1}^{n}|y^j-x^j|\cdot M\leqslant nM|y-x|$$

$$|f(y)-f(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f_i(y)-f_i(x)|\leqslant n^2M|y-x| \qquad \|$$

定理 4（逆函数定理） 设f：$G\to R^n$是C^1类映射，G是R^n中的开集，$a\in G$，并且$\det f'(a)\neq 0$，则存在a的邻域$V\subset G$和$f(a)$的邻域W使得f：$V\to W$有一个可微的逆映射f^{-1}：$W\to V$，并且

$$(f^{-1})'(y)=[f'(f^{-1}(y))]^{-1}$$

证明：1. 不妨设$\lambda=Df(a)$是恒同映射。因为不然的话，由$\det f'(a)\neq 0$，λ^{-1}是存在的，把f改成$\lambda^{-1}\circ f$，则

$D(\lambda^{-1}\circ f)(a)=D(\lambda^{-1})(f(a))\circ Df(a)=\lambda^{-1}\circ\lambda=$恒同

2. 存在以 a 为内点的闭长方体$U\subset G$ 使得 $x\in U$, $x\neq a$ 时, $f(x)\neq f(a)$。因为不然的话, $f(a+h)=f(a)$, 所以

$$\frac{1}{|h|}|f(a+h)-f(a)-\lambda(h)|=\frac{|h|}{|h|}=1\nrightarrow 0$$

与$\lambda=Df(a)$ 的定义矛盾。

3. 存在充分小的闭长方体U使得 $x\in U$ 时$\det f'(x)\neq 0$。

4. 由于f是C'类的, 存在充分小的闭长方体U使得

$$\left|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x^j}-\frac{\partial f_i(a)}{\partial x^j}\right|<\frac{1}{2n^2}$$

5. 对于 $\forall x_1$, $x_2\in U$, $|x_1-x_2|\leqslant 2|f(x_1)-f(x_2)|$。

事实上, 把上引理用于函数$g(x)=f(x)-x$, 对于$\forall x_1$, $x_2\in U$,

$$|f(x_1)-x_1-f(x_2)+x_2|\leqslant n^2\cdot\frac{1}{2n^2}|x_1-x_2|$$

$$=\frac{1}{2}|x_1-x_2|$$

$$|x_1-x_2|-|f(x_1)-f(x_2)|$$

$$\leqslant|f(x_1)-x_1-f(x_2)+x_2|\leqslant\frac{1}{2}|x_1-x_2|$$

$$\therefore|x_1-x_2|\leqslant 2|f(x_1)-f(x_2)|$$

6. 当$x\in\partial U$时, 根据2., $f(x)\neq f(a)$。由于∂U是紧致集, $|f(x)-f(a)|$有极小值d, 即$|f(x)-f(a)|\geqslant d$, $\forall x\in\partial U$, 命$W=\left\{y: |y-f(a)|<\frac{d}{2}\right\}$, 则 $x\in\partial U$, $y\in W$时

$$|y-f(x)|+|y-f(a)|\geqslant|f(x)-f(a)|\geqslant d$$

$$\Rightarrow|y-f(x)|>\frac{d}{2}>|y-f(a)|$$

7. 求证: 对于$\forall y\in W$, 存在U内唯一一点x使得$f(x)=y$。考虑函数

$$g(x)=|y-f(x)|^2=\sum_{i=1}^{n}(y^i-f_i(x))^2,\ \forall x\in U$$

这函数是连续的，所以在紧致集U上有极小值，根据6．，当$x\in\partial U$时，$g(x)>g(a)$，所以极小点$\notin\partial U$，根据§2.4命题9，在极小点x处，

$$\frac{\partial g}{\partial x^j}(x)=0,\Rightarrow 2.\ \sum_{i=1}^{n}(y^i-f_i(x))\frac{\partial f_i(x)}{\partial x^j}=0,$$

$$(j=1,\cdots,n)$$

因为$f'(a)\neq 0$，所以$y^i-f_i(x)=0\ (i=1,\cdots,n)$，即$y=f(x)$，这证明了$U$内存在一点$x$使得$f(x)=y$，根据5．，$f(x_1)=f(x_2)$时$x_1=x_2$，这证明了唯一性。

8．命$V=(U\text{的内部})\cap f^{-1}(W)$，我们已证明：$f:\ V\to W$有逆$f^{-1}$：$W\to V$，则5．可写成

$$|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y_2)|\leqslant 2|y_1-y_2|$$

这证明了f^{-1}的连续性。

9．最后要证明：f^{-1}是可微的。命$\mu=Df(x)$，我们将证明f^{-1}在$y=f(x)$处可微并且有导数μ^{-1}。根据$Df(x)$的定义，当$x_1\in V$时，

$$f(x_1)=f(x)+\mu(x_1-x)+\varphi(x_1-x)$$

$$\lim_{x_1\to x}\frac{|\varphi(x_1-x)|}{|x_1-x|}=0$$

$$\mu^{-1}[f(x_1)-f(x)]=x_1-x+\mu^{-1}[\varphi(x_1-x)]$$

对于$\forall y_1\in W$，存在$x_1\in V$使得$f(x_1)=y_1$，所以上式可以改写成

$$f^{-1}(y_1)=f^{-1}(y)+\mu^{-1}(y_1-y)-\mu^{-1}[\varphi(f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y))]$$

求证

$$\lim_{y_1\to y}\frac{|\mu^{-1}[\varphi(f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y))]|}{|y_1-y|}=0$$

由于 μ^{-1} 是线性变换，因此只须证明

$$\lim_{y_1\to y}\frac{|\varphi(f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y))|}{|y_1-y|}=0$$

证：

$$\frac{|\varphi(f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y))|}{|y_1-y|}$$

$$=\frac{|\varphi(f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y))|}{|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y)|}\cdot\frac{|f^{-1}(y_1)-f^{-1}(y)|}{|y_1-y|}$$

由于 f^{-1} 是连续的，$y_1\to y$ 时，$f^{-1}(y_1)\to f^{-1}(y)$，根据 φ 的定义，第一个因子 $\to 0$；再根据 8.，第二个因子 <2，所以上式 $\to 0$，定理证毕。‖

附记 即使 $\det f'(a)=0$，逆函数 f^{-1} 还是有可能存在，例如函数 $f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但是在 0 的邻域中存在逆函数 $f(x)=\sqrt[3]{x}$，但是无论如何，如果 $\det f'(a)=0$，则 f^{-1} 在 $f(a)$ 处一定不可微，因为 $f\cdot f^{-1}(x)=x$，如果 f^{-1} 在 $f(a)$ 处可微，根据定理 1，

$$Df(a)\cdot Df^{-1}(f(a)) = \text{恒同}\Rightarrow$$
$$\det f'(a)\cdot\det(f^{-1})'(f(a))=1$$

这与 $\det f'(a)=0$ 矛盾。

2. 隐函数定理

定理 5 （隐函数定理）设 $f: R^n\times R^m\to R^m$ 在包含 (a, b) 的一开集中连续可微，且 $f(a, b)=0$。命 M 表示 $(m\times m)$ 矩阵

$$\left(\frac{\partial f_i(a, b)}{\partial x^{n+j}}\right)\quad (i, j=1, \cdots, m)$$

如果 $\det M\neq 0$，则存在 a 的邻域 $A\subset R^n$ 和 b 的邻域 $B\subset R^m$，对于 $\forall x\in A$，存在唯一 $g(x)\in B$，使得 $f(x, g(x))=0$，并

且函数 $g(x)$ 是可微的。

证明：定义 $F: R^n\times R^m\to R^n\times R^m$ 为 $F(x, y)=(x, f(x,y))$，因为 $\det F'(a,b)=\det M\neq 0$，根据逆函数定理，存在 $F(a, b)=(a, f(a, b))=(a, 0)$ 的邻域 $W\subset R^n\times R^m$ 和 (a,b) 的邻域 $A\times B\subset R^n\times R^m$ 使得映射 $F: A\times B\to W$ 有一个可微的逆 $F^{-1}: W\to A\times B$。因为 $F(x, y)=(x, f(x, y))$，所以

$$F^{-1}(x, y)=(x, k(x, y))$$

其中 k 是某可微函数。

定义 $\pi: R^n\times R^m\to R^m$ 为 $\pi(x,y)=y$，则 $\pi\circ F=f$，所以

$$f(x, k(x,y))=f\circ F^{-1}(x, y)$$
$$=\pi(x, y)=y$$

于是 $f(x, k(x, 0))=0$，因此 $g(x)=k(x, 0)$ 即为所求。k 的可微性 $\Rightarrow$ g 的可微性。‖

附记 $g(x)$ 的导数的求法如下：$f_i(x, g(x))=0$

$$\therefore 0=\frac{\partial f_i}{\partial x^j}(x, g(x))+\sum_{\alpha=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x^{n+\alpha}}(x, g(x))$$
$$\times\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^j}(x)$$
$$(i=1, \cdots, m;\ j=1, \cdots, n)$$

因为 $\det M\neq 0$，从这个方程组可以解出 $\frac{\partial g_\alpha}{\partial x^j}(x)$，$(\alpha=1,\cdots, m;\ j=1, \cdots, n)$

推论 设 $f: R^n\to R^p$ 在 R^n 的开集 G 上连续可微，$a\in G$，$p\leqslant n$，如果 $f(a)=0$，并且 $(n\times p)$ 矩阵 $\left(\frac{\partial f_j(a)}{\partial x^i}\right)$ 的秩为 p，则存在一开集 $A\subset R^n$ 和一个具有可微逆的可微映射 $h: A\to R^n$ 使得

$$f\circ h(x^1, \cdots, x^n)=(x^{n-p+1}, \cdots, x^n)$$

证明：把 f 看成函数 $R^p \times R^{n-p} \to R^p$，命 $M=(p \times p)$ 矩阵 $\left(\frac{\partial f_j(a)}{\partial x^{n-p+i}}\right)$，$(i, j=1, \cdots, p)$，如果 $\det M \neq 0$，根据上定理的证明：存在开集 $A \subset R^n$ 和逆映射 F^{-1}：$A \to R^n$，$f \circ F^{-1}(x^1, \cdots, x^{n-p}, x^{n-p+1}, \cdots, x^n)=(x^{n-p+1}, \cdots, x^n)$。

对于一般情形，因为矩阵 $\left(\frac{\partial f_j(a)}{\partial x^i}\right)$ 的秩为 p，存在 $i_1<\cdots<i_p$ 使得矩阵 $\left(\frac{\partial f_j(a)}{\partial x^i}\right)$，$(j=1, \cdots, p;\ i=i_1, \cdots, i_p)$ 有非零行列式。考虑置换 g：$R^n \to R^n$，$g(x^1, \cdots, x^n)=(\cdots, x^{i_1}, \cdots, x^{i_p})$。则 $f \circ g$ 就是上述 f，所以存在 F^{-1} 使得

$$((f \circ g) \circ F^{-1})(x^1, \cdots, x^n)=(x^{n-p+1}, \cdots, x^n) \|$$

§1.3 积　分

1.3.1 集合的体积

R^n 中的闭长方体是

$$I=\{(x^1, \cdots, x^n) \in R^n | a_i \leqslant x^i \leqslant b_i, \quad i=1, \cdots, n\}$$

它的体积定义为

$$v(I)=\prod_{i=1}^{n}(b_i-a_i)$$

对于任意开集 $G \subset R^n$，我们总可以把它剖分成互不重叠的闭长方体 $I_1, \cdots, I_k, \cdots$，我们定义 G 的体积为

$$v(G)=\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k)$$

可以证明：$v(G)$ 与剖分无关，因为不同的剖分将合成更细密的剖分。

如果 G 更是紧致的，则它可以用有限个闭长方体 $J_1, \cdots, J_n$ 覆盖，

$$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) \leqslant \sum_{j=1}^{n} v(I_j)$$

因此正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k)$ 有上界，它是收敛的，$v(G)$ 具有有限值。

设集合$S \subset R^n$，对于$\forall \varepsilon > 0$，如果总存在可数个闭长方体I_1，…，I_k，…，使得$S \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$并且

$$\sum_{k=1}^{\infty} v(I_k) < \varepsilon$$

则S称为**零测集**。如果存在有限个$\{I_k\}$覆盖S而且

$$\sum_{k=1}^{n} v(I_k) < \varepsilon$$

则S称为**零体积集**。显然紧致的零测集一定是零体积集。

如果S是零体积集，则$\bar{S}$也是零体积集，因为$S \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$时$\bar{S} \subset \bigcup_{k=1}^{n} I_k$。

1.3.2 积分的概念

设A是R^n中闭长方体，f：$A \to R$是有界函数，我们要定义f的上积分和下积分。

设S是R^n中一集合，我们定义它的直径为

$$d(S) = \mathrm{Sup}\{|x-y|: x, y \in S\}$$

所谓长方体A的一个**分割**是把A剖分成有限个互不重叠的闭长方体的集合 $\pi = \{I_1, \cdots, I_k\}$，$\bigcup_{j=1}^{k} I_j = A$。我们定义$A$的分割$\pi$

的范数为

$$\|\pi\| = \mathrm{Max}\{d(I_j);\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ k\}$$

命$M_I(f) = \mathrm{Sup}\{f(x): x\in I\}$，$m_I(f) = \inf\{f(x): x\in I\}$，对于$A$的每一个分割$\pi$，定义$f$对于$\pi$的大和与小和为

$$U(f,\ \pi) = \sum_{j=1}^{k} M_{I_j}(f)\, v(I_j)$$

$$L(f,\ \pi) = \sum_{j=1}^{k} m_{I_j}(f)\, v(I_j)$$

显然有

$$L(f,\ \pi) \leqslant U(f,\ \pi)$$

设π和π'是闭长方体A的两种分割，使得π的每一个闭长方体I_j是π'中若干个闭长方体J_{i_1}，…，$J_{i_{l_j}}$的并集，则我们把π'称为比π更细密的分割，记成$\pi < \pi'$。

命题 1 $L(f,\ \pi) \leqslant L(f,\ \pi')$

$$U(f,\ \pi') \leqslant U(f,\ \pi)$$

证明：

$$v(I_j) = v(J_{i_1}) + \cdots + v(J_{i_{l_j}})$$

因为J_{i_r}，$(r=1,\ \cdots,\ l_j) \subset I_j$，所以

$$m_{I_j}(f) \leqslant m_{J_r}(f);\quad M_{I_j}(f) \geqslant m_{J_r}(f)$$

$$m_{I_j}(f)\, v(I_j) = m_{I_j}(f)\, v(I_{i_1}) + \cdots + m_{I_j}(f)\, v(I_{i_{l_j}})$$

$$\leqslant m_{J_{i_1}}(f)\, v(J_{i_1}) + \cdots + m_{J_{il_j}}(f)\, v(J_{i_{l_j}})$$

$$\therefore L(f,\ \pi) = \sum_{j=1}^{k} m_{I_j}(f)\, v(I_j)$$

$$\leqslant \sum_{j=1}^{k} [m_{J_{i_1}}(f)\, v(J_{i_1}) + \cdots + m_{J_{il_j}}(f)\, v(J_{i_{l_j}})]$$

$$= L(f,\ \pi')$$

同理可证

$$U(f, \pi')\leqslant U(f, \pi) \qquad \|$$

推论 对于闭长方体A的任两种分割π和π'有 $L(f,\pi')\leqslant U(f, \pi)$。

证明：作A的一个比π和π'更细密的分割π''，根据上命题知 $L(f, \pi')\leqslant L(f, \pi'')\leqslant U(f, \pi'')\leqslant U(f, \pi)$。‖

现在我们可以定义有界函数f：$A\rightarrow R$的**上积分**和**下积分**分别为

$$\overline{\int_A} f = \inf_{\pi} U(f, \pi), \underline{\int_A} f = \sup_{\pi} L(f, \pi)$$

如果有界函数f：$A\rightarrow R$的上积分和下积分相等，则把它们的公共值称为**f在A上的积分**，记为$\int_A f$，即

$$\int_A f = \overline{\int_A} f = \underline{\int_A} f$$

1.8.3 可积函数

定理 1 （可积准则） 有界函数f：$A\rightarrow R$是可积的当而仅当对每一$\varepsilon>0$存在A的分割π使得

$$U(f, \pi)-L(f, \pi)<\varepsilon$$

证明：如果此条件成立，显然

$$\sup_{\pi} L(f, \pi)=\inf U(f, \pi)$$

另一方面，如果f可积，上式成立，则对于$\forall\varepsilon>0$，存在分割π和π'使得

$$U(f, \pi)-L(f, \pi')<\varepsilon$$

命π''是比π和π'更细密的分割，则根据命题1

$$U(f, \pi'')-L(f, \pi'')\leqslant U(f, \pi) -L(f, \pi')<\varepsilon \qquad \|$$

实例 1. 设f：$A\rightarrow R$是常函数$f(x)\equiv c$，则对于A的任一分割$\pi=\{I_1, \cdots, I_k\}$

$$L(f, \pi)=U(f, \pi)=\sum_{j=1}^{k} cv(I_j)=cv(A)$$

$$\therefore \int_A f = cv(A)$$

2．设$A=[0, 1]\times[0, 1]\subset R^2$，$f: A\to R$定义为

$$f(x, y)=\begin{cases} 0, & \text{如果 } x \text{ 是有理数} \\ 1, & \text{如果 } x \text{ 是无理数} \end{cases}$$

设 $\pi=\{I_1, \cdots, I_k\}$是A的任一分割

$$m_{I_j}(f)=0, \quad M_{I_j}(f)=1$$

$$L(f, \pi)=\sum_{j=1}^{k} 0\cdot v(I_j)=0$$

$$U(f, \pi)=\sum_{j=1}^{k} 1\cdot v(I_j)=v(A)$$

因此f不可积。

有界函数f：$A\to R$在一点$x\in A$的振幅定义如下：对于$\forall r>0$，命

$$\omega_r(x)=\operatorname{Sup}\{f(y):|x-y|\leqslant r\}-\inf\{f(y):|x-y|\leqslant r\}$$

则f在x的振幅定义为

$$\omega(x)=\lim_{r\to 0}\omega_r(x)$$

显然，振幅是非负的，并且当而仅当f在x点连续时，f在x的振幅为零。

引理 设有界函数f：$A\to R$使得$\omega(x)<\varepsilon$，$\forall x\in A$，则存在A的分割π使得

$$U(f, \pi)-L(f, \pi)<\varepsilon v(A)$$

证明：对于每一$x\in A$，存在小闭长方体U_x，以x为它的内点，使得

$$M_{U_x}(f)-m_{U_x}(f)<\varepsilon$$

因为A紧致，存在有限个U_{x_1}，…，U_{x_n}覆盖A，命$\pi=\{I_1,\cdots,I_k\}$是A的一个分割使得每一$I_j\subset$某U_{x_j}，则

$$M_{I_j}(f)-m_{I_j}(f)<\varepsilon$$

所以

$$U(f,\pi)-L(f,\pi)=\sum_{j=1}^{k}\{M_{I_j}(f)-m_{I_j}(f)\}\cdot v(I_j)<\varepsilon v(A) \quad ||$$

定理2 设f：$A\to R$是有界函数，$B=\{x\in A$：f在x点不连续$\}$，则f可积当而仅当B是零测集。

证明：首先设B的测度为0，命$\varepsilon>0$，并且$B_\varepsilon=\{x:\omega(x)\geqslant\varepsilon\}$，则$B_\varepsilon\subset B$，所以$B_\varepsilon$也是零测集。又因$B_\varepsilon$紧致，所以$B_\varepsilon$是零体积集，因此存在有限个闭长方体$U_1$，…，$U_n$覆盖$B_\varepsilon$，并使得

$$\sum_{i=1}^{n}v(U_i)<\varepsilon$$

命π是A的分割，使得π中每一长方体I_j属于下列两组之一：

i）S_1，它包含π中这样的闭长方体I_j，使得每一$I_j\subset$某U_i

ii）S_2，它包含π中其余的闭长方体I_j，使得每一$I_j\cap B_\varepsilon=\varnothing$。命$|f(x)|<M$，$\forall x\in A$，则

$$M_{I_j}(f)-m_{I_j}(f)<2M$$

$$\sum_{I_j\in S_1}\{M_{I_j}(f)-m_{I_j}(f)\}v(I_j)<2M\sum_{i=1}^{n}v(U_i)<2M\varepsilon$$

如果$I_j\in S_2$，则$\omega(x)<\varepsilon$，$\forall x\in I_j$，上述引理告诉我们，存在比π更细密的分割π'，使得

$$\sum_{J\subset I_j}\{M_J(f)-m_J(f)\}v(J)<\varepsilon v(I_j),\quad \forall I_j\in S_2$$

$$U(f,\pi')-L(f,\pi')$$

$$= \sum_{J \subset I_j \in S_1} \{M_J(f) - m_J(f)\} v(J) + \sum_{J \subset I_j \in S_2}$$

$$\times \{M_J(f) - m_J(f)\} v(J) \leqslant 2M\varepsilon + \sum_{I_j \in S_2} \varepsilon v(I_j) \leqslant 2M\varepsilon$$

$$+ \varepsilon v(A) = (2M + v(A))\ \varepsilon$$

因为M和$v(A)$是定数，这说明：我们可以找到一个分割Π'使得$U(f,\ \pi') - L(f,\ \pi') < \varepsilon' = (2M + v(A))\ \varepsilon$，因此$f$可积。

反之，设可积，因为

$$B = B_1 \cup B_{1/2} \cup \cdots \cup B_{1/n} \cup \cdots$$

我们只须证明：每一个$B_{1/n}$的测度为零，因为$B_{1/n}$是紧致的，因此我们证明$B_{1/n}$的体积为零。

任给$\varepsilon > 0$，命π是A的一个分割，使得

$$U(f,\ \pi) - L(f,\ \pi) < \frac{\varepsilon}{n}$$

再命S是π中的闭长方体I使得$I \cap B_{1/n} \neq \phi$，则$I \in S$时，

$$M_I(f) - m_I(f) < \frac{1}{n}$$

$$\therefore \frac{1}{n} \sum_{I \in S} v(I) \leqslant \sum_{I \in I} [M_I(f) - m_I(f)]\, v(I)$$

$$\leqslant \sum_{I \in \pi} [M_I(f) - m_I(f)]\, v(I)$$

$$< \frac{\varepsilon}{n}, \quad (\because f \text{可积})$$

所以$\sum_{I \in S} v(I) < \varepsilon$. ‖

推论 闭长方体A上的有界连续函数是可积的。

直到现在为止，我们只讨论了闭长方体上有界函数的积分。

对于有界集合上的积分也能相应地定义．设C是R^n中有界集合，$C\subset$某闭长方体A。定义C上的特征函数χ_C为

$$\chi_C(x)=\begin{cases}0 & \text{如} \quad x\notin \chi_C\\ 1 & \text{如} \quad x\in \chi_C\end{cases}$$

给出有界函数f：$A\to R$，定义

$$\int_C f=\int_A f\circ\chi_C$$

如果有界函数$f\circ\chi_C$：$A\to R$是可积的，则函数f在集合C上也可积。当然，函数f与χ_C可积时，$f\circ\chi_C$也可积。

命题 2　函数χ_C：$A\to R$是可积的，当且仅当C的边缘是零测集（由于C紧致，因此也是零体积集）．

证明：如果x是C的内点，存在开长方体I，$x\in I\subset C$，所以在I上，$\chi_C\equiv 1$，因此χ_C在C的内点处连续．类似地，如果x在C的外部，则存在开长方体I．$x\in I\subset R^n\setminus C$，在$I$上$\chi_C\equiv 0$，所以$\chi_C$在$C$的外部点也连续．如果$x\in\partial C$，每一个包含$x$的开长方体$I$包括两部分点

$$\chi_C=\begin{cases}1, & y\in I\cap C\\ 0, & y\in(R^n\setminus C)\cap I\end{cases}$$

所以x在∂C上不连续．根据定理2，命题成立．‖

一个边缘是零测集的有界集称为Jordan **可测的**．积分

$$\int_C 1$$

称为集合C的**体积**．这个概念是长度和面积概念的推广。

1.3.4 Fubini定理

定理 3　（Fubini 定理）命A和B分别是$\boldsymbol{R}^n$和$\boldsymbol{R}^m$中的闭长方体，f：$A\times B\to R$是可积的，对于$x\in A$，命g_x：$B\to R$定义为$g_x(y)=f(x, y)$，并命

$$\mathscr{L}(x)=\int_B g_x=\int_B f(x, y)dy$$

$$\mathscr{U}(x)=\overline{\int}_B g_x=\overline{\int}_B f(x,\ y)dy$$

则$\mathscr{L}$和$\mathscr{U}$在A上可积，并且

$$\int_{A\times B} f=\int_A \mathscr{L}=\int_A\left(\overline{\int}_B f(x,\ y)dy\right)dx$$

$$\int_{A\times B} f=\int_A \mathscr{U}=\int_A\left(\underline{\int}_B f(x,\ y)dy\right)dx$$

附记 右边的积分称为**累次积分**。

证明：命π_A和π_B分别为A和B的分割。它们合起来得到$A\times B$的分割π，对于π中一闭方体I，它可以分解成$I_A\times I_B$。其中I_A和I_B分别为π_A和π_B中的闭长方体，因此

$$L(f,\ \pi)=\sum_I m_I(f)v(I)$$

$$=\sum_{I_A}\sum_{I_B} m_{I_A\times I_B}(f)v(I_A\times I_B)$$

$$=\sum_{I_A}\left(\sum_{I_B} m_{I_A\times I_B}(f)v(I_B)\cdot v(I_A)\right)$$

现在，如果$x\in I_A$，则清楚地$m_{I_A\times I_B}(f)\leqslant m_{I_B}(g_x)$。结果对于$x\in I_A$，我们有

$$\sum_{I_B} M_{I_A\times I_B}(f)v(I_B)\leqslant\sum_{I_B} M_{I_B}(g_x)v(I_B)$$

$$\leqslant\underline{\int}_B g_x=\mathscr{L}(x)$$

因此

$$\sum_{I_A}\left(\sum_{I_B} M_{I_A\times I_B}(f)v(I_B)\right)v(I_A)\leqslant L(\mathscr{L},\ \pi_A)$$

同时我们得到

$$L(f,\ \pi)\leqslant L(\mathscr{L},\ \pi_A)\leqslant U(\mathscr{L},\ \pi_A)\leqslant U(\mathscr{U},\ \pi_A)$$
$$\leqslant U(f,\ \pi)$$

其中最后一个不等式的证明完全类似于第一个不等式，因为 f 是可积的。

$$\mathrm{Sup}\{L(f, \pi)\}=\inf\{U(f, \pi)\}=\int_{A\times B} f$$

$$\therefore\quad \mathrm{Sup}\{L(\mathscr{L}, \pi_A)\}=\inf\{U(\mathscr{L}, \pi_A)\}=\int_{A\times B} f$$

这说明，$\mathscr{L}$ 在 A 上可积，并且

$$\int_{A\times B} f=\int_A \mathscr{L}$$

关于第二个结果可以类似地由下列不等式得到

$$L(f, \pi)\leqslant L(\mathscr{L}, \pi_A)\leqslant L(\mathscr{U}, \pi_A)\leqslant U(\mathscr{U}, \pi_A) \leqslant U(f, \pi)$$

附记 1. 可类似地证明

$$\int_{A\times B} f=\int_B\left(\underline{\int_A} f(x, y)dx\right)dy =\int_B\left(\overline{\int_A} f(x, y)dx\right)dy$$

2. 事实上，常见的形式是：g_x 是可积的，这时

$$\int_{A\times B} f=\int_A\left(\int_B f(x, y)dy\right)dx$$

例如 f 是连续函数。

3. 常见的不规则情形是：g_x 对在有限多个点 $x\in A$ 处不可积。这时 $\mathscr{L}(x)=\int_B f(x, y)dy$ 仅对有限多个点 x 不成立。但是如果我们把 $\mathscr{L}$ 在这些点的值重新定义时，$\int_A \mathscr{L}$ 的值保持不变，因此我们仍有

$$\int_{A\times B} f=\int_A\left(\int_B f(x, y)dy\right)dx$$

例如，我们可以规定 $\int_B f(x, y)dy$ 的值为 0。

4. 反例：f：$[0, 1]\times[0, 1]\to R$ 定义为

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{如果 } x \text{ 是无理数}\\ 1, & \text{如果 } x \text{ 是有理数, } y \text{ 是无理数}\\ 1-\dfrac{1}{q}, & \text{如果 } x \text{ 是既约分数 } \dfrac{p}{q}, \\ & y \text{ 是有理数}\end{cases}$$

则 f 是可积的，并且 $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 1$

但是，如果 x 是无理数，$\int_0^1 f(x,y)dy = 1$。

如果 x 是有理数，$h(x)=\int_0^1 f(x,y)dy$ 不存在，命 $h(x)=0$，x 是有理数；$h(x)=1$，x 是无理数。则 $h(x)$ 不可积。

1.3.5 单位分解

先作一些准备：

（1）考虑函数 f：$R\to R$，定义为

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

下面我们要证明：$f(x)$ 是 C^∞ 的，并且 $f^{(n)}(0)=0$。因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x^2}}=0$$

$$\therefore \quad f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0 & , x=0\end{cases}$$

现在用归纳法，假设

$$f^{(n)}(x)=\begin{cases}p\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

其中 $p\left(\dfrac{1}{x}\right)$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的多项式。因为

$$f^{(n+1)}(x)=\begin{cases} q\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases}$$

其中$q\left(\frac{1}{x}\right)$是$\frac{1}{x}$的另一个多项式。

（2）由（1）推出，下列函数f：$R\rightarrow R$

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\left(\frac{1}{x-a}+\frac{1}{b-x}\right)^2}, & x\in(a,b) \\ 0 & , x\notin(a,b) \end{cases}$$

是C^∞函数，它在（a，b）上为正，其他处为0。

（3）设f是（0，ε）上为正的C^∞函数，在其它处为0，再定义g：$R\rightarrow[0,1]$为

$$g(x)=\int_0^x f\Big/\int_0^\varepsilon f$$

则得到C^∞函数$g(x)$使得

$$g(x)=\begin{cases} 0, & \text{当 } x\leqslant 0 \\ 1, & \text{当 } x\geqslant\varepsilon \end{cases}$$

（4）再设f是（-1，$+1$）上为正的C^∞函数，在其它处为0，定义g：$R^n\rightarrow R$为

$$g(x)=f\left(\frac{x_1-a_1}{\varepsilon}\right)\cdots f\left(\frac{x_n-a_n}{\varepsilon}\right)$$

则g是$(a_1-\varepsilon, a_1+\varepsilon)\times\cdots\times(a_n-\varepsilon, a_n+\varepsilon)$上为正的$C^\infty$函数，在其它处为0。

（5）设$A\subset R^n$是开集，$C\subset A$是紧致集，则存在非负C^∞函数f：$A\rightarrow R$使得

$$f(x)\begin{cases} >0, & \text{当 } x\in C \\ =0, & \text{当 } x\in \text{包含在} A \text{中的某闭集的外部点} \end{cases}$$

证：设$(a_1, \cdots, a_n)\in C$。因为C紧致，它是有界闭集，所以存在闭长方体$I=[a_1-\varepsilon, a_1+\varepsilon]\times\cdots\times[a_n-\varepsilon, a_n+\varepsilon]$，$C\subset I$。作

函数 $g: R^n\to R$ 使得它是 I 上为正的 C^∞ 函数，在其它处为 0．作闭集 U 使得 $C\subset U\subset A$，命 $f(x)=g(x)\cdot\chi_U(x)$，则 $f(x)$ 是闭集 $I\cap U$ 上为正的 C^∞ 函数，在 $I\cap U$ 外为 0．注意 $C\subset I\cap U$，$I\cap U\subset U\subset A$，命题证毕．‖

（6）存在 C^∞ 函数 $f: A\to[0, 1]$ 使得 $f(x)=1, \forall x\in C$，其中 A 是 R^n 中的开集，C 是 A 的紧致子集．

证：根据（5），我们已经作好函数 $\hat{f}(x)$，使得 $\hat{f}(x)>0$，当 $x\in C$．由于光滑函数一定连续，所以总存在 $\varepsilon>0$ 使得 $\hat{f}(x)\geqslant\varepsilon$，$\forall x\in C$．再设 $g(x)$ 是（3）中的函数，则复合函数 $f=g\circ\hat{f}$ 即为所求．

定理 4 集合 $A\subset R^n$，$\mathscr{U}=\{U\}$ 是 A 的开覆盖，存在定义在包含 A 的开集上的 C^∞ 函数组 $\Phi=\{\varphi\}$，它具有以下性质：

（1）对于 $\forall x\in A$，$0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$

（2）对于 $\forall x\in A$，存在包含 x 的开集 V 使得除了有限多个 $\varphi\in\Phi$ 以外，其它 φ 在 V 上为零．

（3）对于 $\forall x\in A$，$\sum_{\varphi\in\Phi}\varphi=1$，（根据（2），在包含 x 的某开集 V 上这是有限和）．

（4）对于 $\forall\varphi\in\Phi$，存在 $\mathscr{U}$ 中某开集 U 使得在包含于 U 中某闭集以外，$\varphi=0$．

附记　满足（1），（2），（3）的函数组 $\Phi=\{\varphi\}$ 称为集合 A 的 C^∞ **单位分解**；如果函数组 Φ 更满足（4），则称为**附属于覆盖** $\mathscr{U}$ **的单位分解**．

证明：情形 1．A 是紧致的．

这时，A 具有有限开覆盖 $\mathscr{U}=\{U_1, \cdots, U_n\}$，我们首先寻找紧致集 $D_i\subset U_i$ 使得 D_i 的内点覆盖 A，集 $D_i(i=1, \cdots, n)$ 可以归纳地作出如下：设 $D_1, \cdots, D_k$ 已作好，使得 $\{D_1$ 的内点，$\cdots$，D_k 的内点，$U_{k+1}, \cdots, U_n\}$ 覆盖 A．命 $C_{k+1}=A-(\operatorname{int}D_1\cup\cdots\cup\operatorname{int}D_k\cup U_{k+2}\cup\cdots\cup U_n)$，则 $C_{k+1}\subset U_{k+1}$ 是紧致的．容易作出一紧致集 D_{k+1} 使得

$$C_{k+1}\subset \mathrm{int}D_{k+1},\quad D_{k+1}\subset U_{k+1}$$

于是紧致集$D_i(i=1,\cdots,n)$已作好。命ψ_i是非负C^∞函数，它在D_i上为正，在包含U_i中某闭集外为0。因为$\{D_1,\cdots,D_n\}$覆盖A。所以$\psi_1(x)+\cdots+\psi_n(x)>0$，对于$\forall x\in$包含$A$的某开集$U$。在$U$上定义

$$\varphi_i(x)=\frac{\psi_i(x)}{\psi_1(x)+\cdots+\psi_n(x)}$$

如果f：$U\to[0,1]$是C^∞函数，它在A上为1。在U中某闭集外为0，则C^∞函数组$\Phi=\{f\circ\varphi_1,\cdots,f\circ\varphi_n\}$即为所求的单位分解。

情形2。$A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，其中每一$A_i$是紧致的。$A_i\subset\mathrm{int}A_{i+1}$。

设$\mathscr{U}=\{U\}$是A的开覆盖，$\mathscr{U}_i=\{U\cap(\mathrm{int}A_{i+1}-A_{i-2})\}$，则$\mathscr{U}_i$是紧致集$B_i=A_i-\mathrm{int}A_{i-1}$的开覆盖。根据情形1，存在附属于$\mathscr{U}_i$的$B_i$的单位分解$\Phi_i$。对于$\forall x\in A$，下列和

$$\sigma(x)=\sum_{\varphi\in\Phi_i,\ 所有\ i}\varphi(x)$$

在包含x的某开集中是有限和。这是由于如果$x\in A_i$，对于$\varphi\in\Phi^j$ $(j\geqslant i+2)$我们有$\varphi(x)=0$，对于每一个Φ中每一个φ，定义

$$\varphi'(x)=\varphi(x)/\sigma(x)$$

则$\{\varphi'\}$即为所求的单位分解。

情形3。A是开集

命$A_i=\left\{x\in A;\ |x|\leqslant i\ 并且\ x\ 到\ A\ 的边界的距离\geqslant\frac{1}{i}\right\}$，然后应用情形2的结果。

情形4。A任意

命B是A的开覆盖$\mathscr{U}=\{U\}$的并集。根据情形3，存在B的单位分解，它也是A的单位分解。||

注意 定理中条件（2）的一个重要结果要提一下。命 $C\subset A$ 是紧致的，对于 $\forall x\in C$，存在包含 x 的开集 V_x 使得仅有有限多个 $\varphi\in\Phi$ 在 V_x 上不为 0。又因为 C 紧致，仅有有限多个这样的 V_x 可以覆盖 C，所以在 C 上仅有有限多个 $\varphi\in\Phi$ 不为零。

下面我们将用单位分解来定义 R^n 的任意开集 A 上的积分。

设 $\mathscr{U}=\{U\}$ 是集 A 的开覆盖，$\Phi=\{\varphi\}$ 是 A 的附属于 $\mathscr{U}$ 的单位分解。把 U 选得好一些，例如是开长方体。给出有界函数 $f: A\to R$，假定它在 U 上可积，则由于 φ 是 C^∞ 函数，$\varphi\cdot f$ 也在 U 上可积。于是我们可以定义

$$\int_A f=\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi\cdot f$$

上式右边要求它是收敛的，而且和与各项的次序无关，因此我们必须要求右边是绝对收敛的。

在定理 4 的证明的情形 3 中我们已指出，开集 A 是紧致集 $\{A_i\}$ 的并集。在每一个紧致集 A_i 中仅有有限多个 $\varphi\in\Phi$ 不为 0，所以积分 $\int_{A_i} f$ 有意义。

命题 3 （1）如果集 A 有界，$f: A\to R$ 是有界函数，并且 f 的不连续点集是零测集，则和 $\sum\limits_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi\cdot f$ 收敛；

（2）如果 $\mathscr{U}'=\{U'\}$ 是 A 的另一开覆盖，$\Psi=\{\psi\}$ 是 A 的附属于 $\mathscr{U}'$ 的单位分解，则

$$\sum_{\varphi\in\Phi}\int_A \varphi\cdot f=\sum_{\psi\in\Psi}\int_A \psi\cdot f$$

（3）设 A 是 Jordan 可测的，并且 $f: A\to R$ 可积，则上面的积分 $\int_A f$ 的定义重合于 § 3.3 末的定义。

证明：（1）设 $A\subset$ 闭长方体 B，并且 $|f(x)|\leqslant M$，$\forall x\in A$，则

$$\int_A |\varphi \cdot f| \leqslant M \int_A \varphi$$

因此，如果F是Φ的任何有限子组，则有

$$\sum_{\varphi \in F} \int_A |\varphi \cdot f| \leqslant \sum_{\varphi \in F} M \int_A \varphi = M \int_A \left(\sum_{\varphi \in F} \varphi \right)$$

因为F有限，右边有意义，但是

$$\sum_{\varphi \in F} \varphi \leqslant \sum_{\varphi \in \Phi} \varphi = 1$$

$$\sum_{\varphi \in F} \int_A |\varphi \cdot f| \leqslant M \cdot v(A) \leqslant M \cdot v(B)$$

上述不等式对于Φ的任何有限子组成立。所以 $\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A |\varphi \cdot f|$ 收敛，即 $\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f$ 绝对收敛。

（2）如果$\Psi = \{\psi\}$是A的另一单位分解。则$\{\varphi \cdot \psi\}$，$\forall \varphi \in \Phi$，$\psi \in \Psi$，也是A的一个单位分解，所以

$$\sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \varphi \cdot f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A \left(\sum_{\psi \in \Psi} \psi \right) \varphi \cdot f$$

$$= \sum_{\varphi \in \Phi} \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi \cdot \varphi \cdot f$$

$$= \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \left(\sum_{\varphi \in \Phi} \varphi \right) \cdot \psi \cdot f$$

$$= \sum_{\psi \in \Psi} \int_A \psi \cdot f$$

（3）给出$\varepsilon > 0$，存在一紧致 Jordan 可测集$C \subset A$使得

$\int_{A-C} 1<\varepsilon$，注意 C 紧致，仅有有限多个开集 U 覆盖 C，设相应的单位分解函数为 φ，这些 φ 在 C 上不为零，命 F 是这些 φ 的集合，其余的 φ 在 C 上为 0，在 $A-C$ 的一部分上不为零。

$$\left|\int_A f-\sum_{\varphi\in F}\int_A \varphi\cdot f\right|\leqslant\int_A\left|f-\sum_{\varphi\in F}\varphi\cdot f\right|$$

$$\leqslant M\int_A\left(1-\sum_{\varphi\in F}\varphi\right)=M\int_A\left(\sum_{\varphi\in\Phi-F}\varphi\right)$$

$$\leqslant M\int_{A-C}1<M\varepsilon$$

$$\therefore\quad \sum_{\varphi\in\Phi}\int_A\varphi\cdot f=\int_A f.\|$$

1.3.6 积分变量替换

如果 g：$[a,\ b]\to R$ 是连续可微函数，f：$R\to R$ 是连续函数，则已熟知

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f=\int_a^b (f\circ g)\cdot g'$$

证明：设 f 的原函数是 F，即 $F'=f$，则 $(F\circ g)'=(f\circ g)\cdot g'$。因此上式左边是 $F(g(b))-F(g(a))$；另一方面，右边是

$$(F\circ g)(b)-(F\circ g)(a)=F(g(b))-F(g(a))$$

如果 g 更是一一的，则有

$$\int_{g(a,\ b)} f=\int_{(a,\ b)}(f\circ g)\cdot|g'|$$

证明：只须分别考虑 g 是递增或递减的情形。

现在我们把最后一个公式推广到高维的情形。

定理 5 设 $A\subset R^n$ 是一开集，g：$A\to R^n$ 是一一的连续可微函数，使得 $\det g'(x)\neq 0$，$\forall x\in A$。如果 f：$g(A)\to R$ 是可积函数，则

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) \cdot |\det g'|$$

证明：我们先对问题作一些简化。

1. 如果存在A的开覆盖$\mathscr{U} = \{U\}$使得对于每一$U \in \mathscr{U}$和任一可积函数f有

$$\int_{g(U)} f = \int_U (f \circ g) \cdot |\det g'|$$

则定理对整个A也成立。

证明：$\mathscr{U} = \{U\}$覆盖A，所以$\{g(U)\}$覆盖$g(A)$，命$\Phi = \{\varphi\}$是附属于开覆盖$\{g(U)\}$（因为g是一一的）的单位分解，则在$g(U)$以外，$\varphi = 0$，由于g是一一的，所以$(\varphi \cdot f) \circ g$在$U$外为0，因此下式

$$(*) \qquad \int_{g(U)} \varphi \cdot f = \int_U (\varphi \cdot f) \circ g \cdot |\det g'|$$

可以改写成

$$\int_{g(A)} \varphi \cdot f = \int_A ((\varphi \cdot f) \circ g) \cdot |\det g'|$$

$$\int_{g(A)} f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_{g(A)} \varphi \cdot f = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A ((\varphi \cdot f)$$

$$\circ g) \cdot |\det g'| = \sum_{\varphi \in \Phi} \int_A (\varphi \circ g) \cdot (f \circ g)$$

$$\cdot |\det g'| = \int_A (f \circ g) \cdot |\det g'| \qquad \|$$

附记 设V是$g(A)$的某开覆盖的一开集，假设（*）也可以换成

$$(*)' \qquad \int_V f = \int_{g^{-1}(V)} (f \circ g) \cdot |\det g'|$$

2. 如果定理对于$f = 1$成立，则对于一般f也成立。

证明：首先，如果定理对于$f = 1$成立，则对于$f =$常数也成立。

命V是$g(A)$中的闭长方体，π是V的一分割，对于π中任一闭长方体I，命f_I是常数$m_I(f)$，则

$$L(f,\pi)=\sum_I m_I(f)v(I)=\sum_I\int_{\text{int}\,I}f_I$$

$$=\sum_I\int_{g^{-1}(\text{int}\,I)}(f_I\circ g)\cdot|\det g'|$$

$$\leqslant\sum_I\int_{g^{-1}(\text{int}\,I)}(f_I\circ g)|\det g'|$$

$$=\int_{g^{-1}(V)}(f\circ g)\cdot|\det g'|$$

因为$\int_V f$是$L(f,\pi)$的上确界，所以

$$\int_V f\leqslant\int_{g^{-1}(V)}(f\circ g)\cdot|\det g'|$$

类似地，命$f_I=M_I(f)$，则有

$$\int_V f\geqslant\int_{g^{-1}(V)}(f\circ g)\cdot|\det g'|$$

$$\therefore\quad\int_V f=\int_{g^{-1}(V)}(f\circ g)\cdot|\det g'|$$

根据1的附记，2成立

3．如果定理对于g：$A\to R^n$和h：$B\to R^n$成立，其中$g(A)\subset B$，则定理对于组合映射$h\circ g$：$A\to R^n$也成立。

证明：$\int_{h\circ g(A)}f=\int_{h[g(A)]}f=\int_{g(A)}(f\circ h)|\det h'|=$

$$\int_A((f\circ h)\circ g)\cdot(|\det h'|\circ g)|\det g'|=\int_A(f\circ(h\circ g))\cdot|\det(h\circ g)'|$$

4．定理对于线性变换g成立。

证明：先证明，如果g把闭立方体I变成$g(I)$，则

$$\mathrm{Vol}\,g(I)=|\det g|\cdot\mathrm{Vol}\,I$$

g 把 R^n 的标准基映成由 g 的表示矩阵的列向量组成的平面多面体，把这些列向量标准正交化，g 转化成一个三角矩阵。$\det g$ 是它的对角线元素的乘积，这些元素的绝对值正好是平行多面体的长、宽、高等，所以平行多面体 $g(I)$ 的体积正好等于 $|\det g'|$。

现在我们只须假定 $f=1$，对于任何开长方体 U 有

$$\int_{g(U)}1=\mathrm{Vol}\,g(U)=|\det g'|\cdot\mathrm{Vol}U$$

$$=|\det g'|\cdot\int_U 1=\int_U|\det g'|$$

附记 根据3和4，我们可以对任何点 $a\in A$，假定 $g'(a)=$ 单位矩阵 I。事实上，命 $T=Dg(a)$。根据4，定理对于 T 成立。由于 $(T^{-1}\circ g)'(a)=1$。假定定理对于后者成立，则根据3，定理对于 $T\circ(T^{-1}\circ g)$ 也成立。

定理的证明：对于 n 作归纳法。根据定理前的叙述和1，已知定理对于 $n=1$ 成立，假定定理对于 $n-1$ 成立，求证它对于 n 也成立。对于 $\forall a\in A$，我们只须找到一个开集 U，使得 $a\in U\subset A$，并且对于 U 定理成立。此外，根据2，我们可以假定 $f=1$；再根据上述附记，$g'(a)=I$。

定义 h：$A\to R^n$ 为 $h(x)=(g_1(x),\ \cdots,\ g_{n-1}(x),\ x_n)$，则 $h'(a)=I$，因此在包含 a 的某开集 $U'\subset A$ 中映射 h 是一一的，并且 $\det h'(x)\neq 0$。因此，我们可以定义 k：$h(U')\to R^n$ 为 $k(x)=(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ g_n(h^{-1}(x)))$。于是我们把 g 分解成组合映射 $k\circ h$，使得其中每一映射低于 n 维。

$$\begin{aligned}(g_n\circ h^{-1})'(h(a))&=g_n'(a)\cdot(h^{-1})'(a)\\&=g_n'(a)\cdot[h'(a)]^{-1}\\&=g_n'(a)\end{aligned}$$

$$D_n(g_n\circ h^{-1})(h(a))=D_ng_n(a)=1\Rightarrow k'(h(a))=I$$

因此，存在某开集 V，$h(a)\in V\subset h(U')$ 使得 k 在 V 上是一一

的，并且 $\det k'(x)\neq 0$。命 $U=h^{-1}(U)$，则有 $g=k\circ h$，其中 $h: U\to R^n$，$k: V\to R^n$，并且 $h(U)\subset V$，根据 3，只须对 h 和 k 来证明定理。下面我们给出 h 的证明，k 的证明和它类似，并且将更容易些。

命 $W\subset U$ 是闭长方体，$W=D\times[a_n, b_n]$，其中 D 是 R^{n-1} 中的闭长方体。根据 Fubini 定理

$$\int_{h(W)}1=\int_{[a_n,\ b_n]}\left(\int_{h(D\times\{x_n\})}1dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n$$

命 $h_{x_n}: D\to R^{n-1}$ 定义为

$$h_{x_n}(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})$$
$$=(g_1(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n),\ \cdots,\ g_{n-1}(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n))$$

则每一 h_{x_n} 显然是一一的，并且

$$\det(h_{x_n})'(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})=\det h'(x_1,\ \cdots,\ x_n)\neq 0$$

此外

$$\int_{h(D\times\{x_n\})}1dx_1\cdots dx_{n-1}=\int_{h_{x_n}(D)}1dx_1\cdots dx_{n-1}$$

由于已假定定理对 $n-1$ 维成立，所以

$$\int_{h(W)}1=\int_{[a_n,\ b_n]}\left(\int_{h_{x_n}(D)}1dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n$$
$$=\int_{[a_n,\ b_n]}\left(\int_D|\det(h'_{x_n})(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1})|\right.$$
$$\left.dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n=\int_{[a_n,\ b_n]}\left(\int_D|\det h'(x_1,\cdots,\right.$$
$$\left.x_n)|dx_1\cdots dx_{n-1}\right)dx_n=\int_W|\det h'|$$

同理

$$\int_{k(W)}1=\int_D\left(\int_{k(\{x_1,\cdots,x_{n-1}\}\times[a_n,\ b_n])}1dx_n\right)dx_1\cdots dx_{n-1}$$

定义 $k_{x_1,\cdots,x_{n-1}}: [a_n,\ b_n]\to R$ 为

$$k_{x_1,\cdots,x_{n-1}}(x_n)=g_n[h^{-1}(x_1,\ \cdots,\ x_n)]$$

$$\int_{k(W)}1=\int_D\left(\int_{k_{x_1},\cdots,x_{n-1}[a_n,\ b_n]}1dx_n\right)dx_1\cdots dx_{n-1}$$

$$=\int_D\left(\int_{[a_n,\ b_n]}|\det(k_{x_1,\cdots,x_{n-1}})(x_n)|dx_n\ \right)dx_1\cdots dx_{n-1}$$

$$=\int_D\left(\int_{[a_n,\ b_n]}|\det k'(x_1,\cdots,\ x_{n-1},\ x_n)|dx_n\right)$$

$$dx_1\cdots dx_{n-1}=\int_W|\det k'|$$

定理证毕。‖

附记 上述定理中条件 $\det g'(x)\neq 0$ 是多余的，这可以从下列 Sard 定理的特殊情形看出。

命题 4 命 g：$A\to R^n$ 是连续可微函数，$A\subset R^n$ 是开集，命 $B=\{x\in A;\ \det g'(x)=0\}$，则 $g(B)$ 是零测集。

证明：命 I 是 A 中的闭立方体，边长为 l，命 $\varepsilon>0$，如果 N 充分大，把 I 剖分成边长为 $\frac{l}{N}$ 的 N^n 个立方体，则对于每一个小立方体 S，如果 $x\in S$，我们有

$$|Dg(x)(y-x)-(g(y)-g(x))|$$

$$<\varepsilon|x-y|\leqslant\varepsilon\sqrt{n}\left(\frac{l}{N}\right),\ \ \forall y\in S$$

如果 $S\cap B\neq\phi$，选固定的 $x\in S\cap B$，由于 $\det g'(x)=D$，所以 $Dg(x)$ 是退化的线性变换，因此

$\{Dg(x)(y-x);\ y\in S\}\subset R^n$ 的 $(n-1)$ 维子空间 V 中，于是 $\{g(y)-g(x);\ y\in S\}\subset$ 与 V 的距离为 $\varepsilon\sqrt{n}\frac{l}{N}$ 的两平行平面间，这说明 $\{g(y);\ y\in S\}$ 位于 $(V+g(x))$ 的两平行平面之间。

由于 g 是 C^1 类的，S 是紧致集，则 $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ 在 S 上有上界，所以 $\|Dg(x)\|<M$。根据中值定理

$$|g(y)-g(x)|\leqslant M\cdot|y-x|$$
$$\leqslant M\cdot\sqrt{n}\left(\frac{l}{N}\right)$$

因此$\{g(y): y\in S\}$位于高小于$2\varepsilon\sqrt{n}\left(\frac{l}{N}\right)$，底是半径小于$M\cdot\sqrt{n}\left(\frac{l}{N}\right)$的（$n-1$）维球的柱体中，这柱体的体积$<C\cdot\left(\frac{l}{N}\right)^n\cdot\varepsilon$，$C$是某常数，这样的立方体$S$最多有$N^n$个。所以

$$g(S\cap B)\subset\text{体积小于}C\cdot\left(\frac{l}{N}\right)^n\varepsilon\cdot N^n=C\cdot l^n\varepsilon\text{的集}$$

这结果对于任何$\varepsilon>0$都成立，所以$g(S\cap B)$是零测集，$\{S\}$是A的剖分$g(B)=\bigcup_{S\in A}g(S\cap B)$，由于$S$可数，所以$g(B)$是零测集. ||

第二章 微分流形

§2.1 微分流形的基本概念

"流形"的概念就是欧几里德空间 R^n 的推广，又是建立在 R^n 的基础上的，所以有必要对空间 R^n 加以说明。

1. 空间 R^n 的基本性质

R 表示实数域，$R^n = R\times R\times\cdots\times R$ 是 R 的 n 重笛卡尔积。即全体有序 n（实）数组 $(x^1, \cdots, x^n)$ 的集合。

$$R^n = \{x = (x^1, \cdots, x^n);\ x^i \in R,\ (i = 1, \cdots, n\}$$

作为向量空间，R^n 中有加法和用实数乘的代数运算

$$x + y = (x^1 + y^1, \cdots, x^n + y^n);$$

$$\alpha x = (\alpha x^1, \cdots, \alpha x^n),\ \alpha \in R$$

作为欧氏空间，R^n 中定义了内积

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x^i y^i$$

因而，自然地，可定义范数和距离

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}$$

$$d(x, y) = |x - y|$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x^i - y^i)^2}$$

在 R^n 中还存在着"自然拓扑"结构，如果对每一点 $x \in R^n$，

我们取开球

$$R_\varepsilon(x)=\{y\in R^n;\ d(x,\ y)<\varepsilon,\ \varepsilon\in R^+\}$$

或取开立方体

$$C_\varepsilon(x)=\{y\in R^n;\ |x^i-y^i|<\varepsilon,\ \varepsilon\in R^+,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$$作为点 x 的邻域。就在 R^n 中导出了拓扑结构。

由此看出，空间 R^n 有着非常好的数学结构，在本书中根据需要，当我们用到 R^n 的拓扑性质时，就把它看成拓扑空间并带有上述的自然拓扑。当我们用到 R^n 的线性性质时，又把它看成向量空间。有时，我们还把 R^n 看成以

$$\begin{cases} e_1=(1,\ 0,\ \cdots,\ 0) \\ e_2=(0,\ 1,\ \cdots,\ 0) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_n=(0,\ 0,\ \cdots,\ 1) \end{cases}$$

为标准正交基的欧氏空间等等。

2．拓扑流形的定义

在局部微分几何中，曲面的参数表示就是通过同胚 φ 将 R^2 的一个开域与曲面片等同起来，这样就在曲面上引进了曲纹坐标。但是用一块平面来表示一块曲面的办法只是在局部才办得

图 2.1

到。当考虑整体问题时，例如考虑整个球面，由于它和平面的拓扑性质不同，平面到球面的整体的微分同胚是不存在的。换言之，无法在整个球面上引进一种单一的坐标使它与 R^n 或 R^n的开集一一对应。

当然，可以把球面看成两个半球面粘合起来的，而在每个半球面上可以引进坐标，关键是要求在连结的地方能粘合得光滑，以便运用微积分的工具。象这种由几块同胚于欧氏空间的开域的片粘合起来得到的拓扑空间就是“流形”。下面给出严格的定义。

定义 1 一个拓扑空间M，满足

（1）M是 Hausdorff 的；

（2）M是局部欧氏的，即对于 $\forall P\in M$，存在P的邻域U，使得

$$\varphi: U\rightarrow R^n$$

是U到$\varphi(U)\leqslant R^n$的同胚，且$\varphi(U)$是R^n的开集；

（3）M有可数的拓扑基

则M称为 n 维**拓扑流形**，简记为**n-流形**。其中$\varphi: U\rightarrow\varphi(U)$称为坐标映射，$U$称为**局部坐标域**，$(U, \varphi)$称为**局部坐标系**或坐标卡。如果$P\in U$，$\varphi(P)=0$，则称坐标卡是以$P$为心的。

根据定义和点集拓扑的知识可以证明

命题 1 一个拓扑流形是局部连通的，局部紧致的，也是可数个紧致子集的并，同时M还是正规的，可度量化的。

证明可参阅 W. M. Boothby 的著作：《An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry》中 P9，定理（3.6）。以下凡提到 Boothby 的书，都是指这本书。

3．微分流形的定义

定义 2 拓扑流形M上的C^k类（$1\leqslant k\leqslant\infty$）**微分构造**是$M$上坐标卡之集$\Phi=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha): \alpha\in A$(任意指标集)$\}$满足以下条件

（1）$M=\bigcup\limits_{\alpha\in A}U_\alpha$，即所有的$U_\alpha$覆盖$M$；

（2）对任意的α，$\beta\in A$，坐标卡$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$和$(U_\beta, \varphi_\beta)$是$C^k$－相容的。即当$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$时，$\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$和$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$是$R^n$的

开子集 $\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)$ 和 $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)$ 之间的 C^k 类微分同胚；

（3）集合 Φ 对于性质（2）是极大的，即若存在 (U, φ) 与每个别的坐标卡的相容，则必属于 Φ。

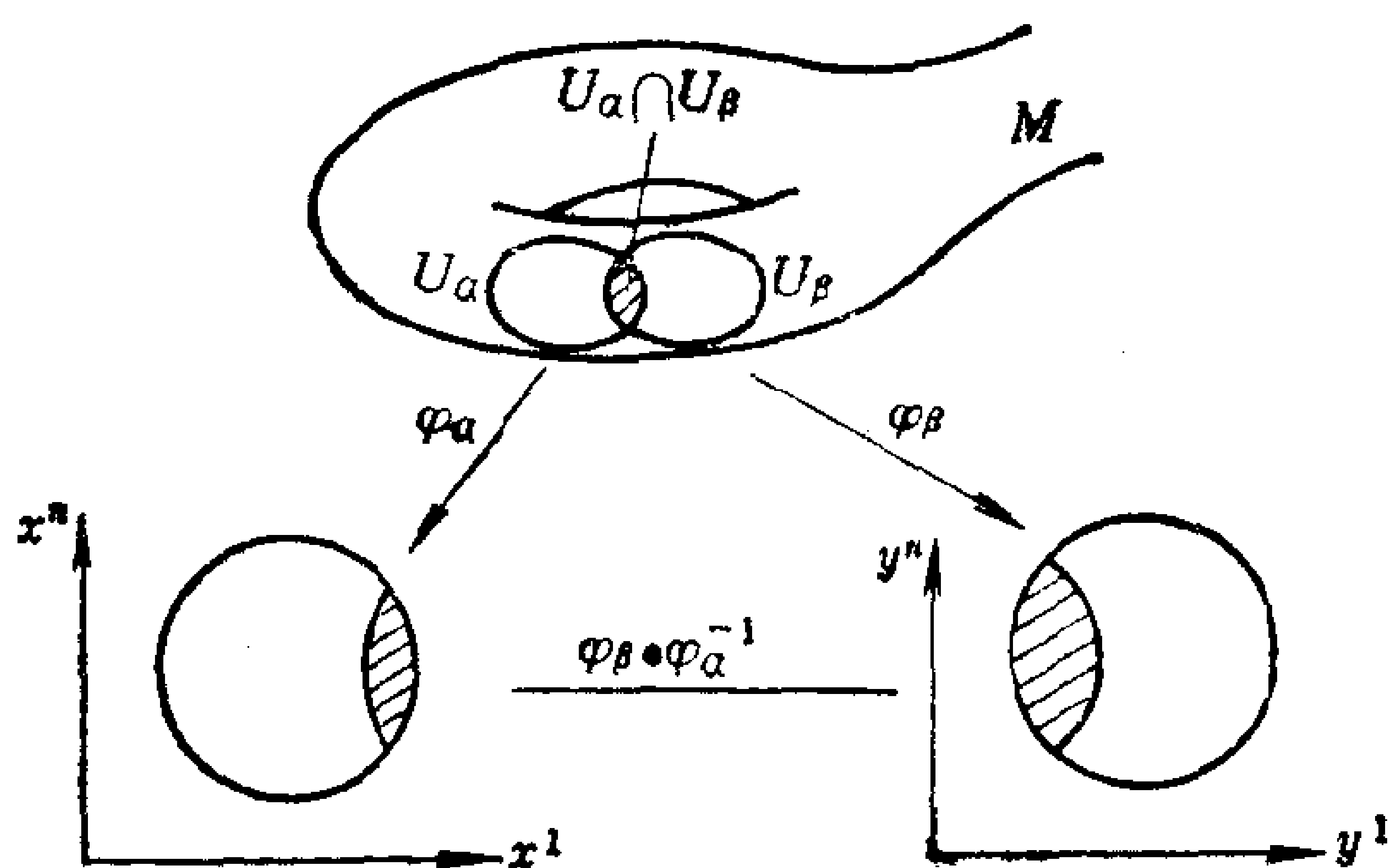


图 2.2

一个 n 维流形 M，连同它上面的 C^k 类微分构造 Φ 一起组成的对 (M, Φ) 称为 C^k 类 n 维微分流形，简记作 C^k-流形。C^∞-流形称为光滑流形。C^ω-流形又称为解析流形，它要求所有的 φ_β。φ_α^{-1} 都是解析的。本书中所讨论的，除特殊指明者外，都是 C^∞-流形。

命题 2 M 是 n-流形，如果 $\Phi_0=\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ 是覆盖 M 的一族 C^∞ 相容的坐标卡。那么，存在唯一的包含 Φ_0 的微分构造 Φ。

证明：命 $\Phi=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)$：$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$ 和 $\varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1}$ 是 C^∞ 的，$\forall\varphi_\beta\in\Phi_0\}$。显然，$\Phi$ 覆盖 M，包含 Φ_0。容易验证满足条件（2），且由构造法，得知它是极大的，因此 Φ 是所求的唯一的微分构造。‖

4. 微分流形的例子

（1）欧氏平面 E^2。选定单位长度后，E^2 成为度量空间，显然对度量拓扑是 Hausdorff 的，而且有可数基。再选定一直角坐标系就建立了一个同胚（甚至是等度量的）φ：$E^2\to R^2$。因此，我

们用单个坐标系（V，φ）覆盖了E^2，其中$V=E^2$，$\varphi(V)=R^2$。这样，E^2不仅是拓扑流形，根据命题2，（V，φ）确定了E^2上的微分构造，因此是C^∞-流形。

在E^2上有许多其它的坐标系同属于由（V，φ）确定的微分构造。例如：选另一直角坐标系（V，φ'）。由解析几何知识可知，坐标变换是

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + a \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + b \end{cases}$$

显然它们是C^∞相容的（甚至是解析的）。

同理可知，n维欧氏空间E^n也是C^∞-流形。

（2）R^n中的开集U　当选恒同映射id后，（U，id）确定了U上的微分构造，因而构成微分流形。若选一同胚$h: U\to U'$，则（U，h）也确定U上的一个微分构造，因而也构成微分流形。如果h是微分同胚，则（U，id）与（U，h）是C^∞相容的，它们确定同一微分构造。如果h只是同胚而不是微分同胚，则（U，id）与（U，h）确定了两个互不相容的微分构造。

例如，$(-1,1)\subset R$，对于$\forall t\in(-1,1)$，$\mathrm{id}(t)=t$确定了一个微分构造，$h(t)=t^3$也确定了一个微分构造。但是，容易看出$h\circ\mathrm{id}^{-1}$：$t\to t^3$是C^∞的，而$\mathrm{id}\circ h$：$t\to t^{1/3}$是不可微的。因此，它们确定了两个互不相容的微分构造。

（3）球面S^2

设球面S^2的方程是

$$S^2:\ x^2+y^2+z^2=r^2\quad(r>0)$$

用两个坐标域U_1，U_2来覆盖S^2，其中

$$U_1:\ z>-\frac{r}{2},\quad U_2:\quad z<\frac{r}{2}$$

坐标映射φ_1：$U_1\to R^2$，定义为以南极$S(0,0,-r)$为投影中心的球极投影。即对$P(x,y,z)\in U_1$，引连接南极之直线

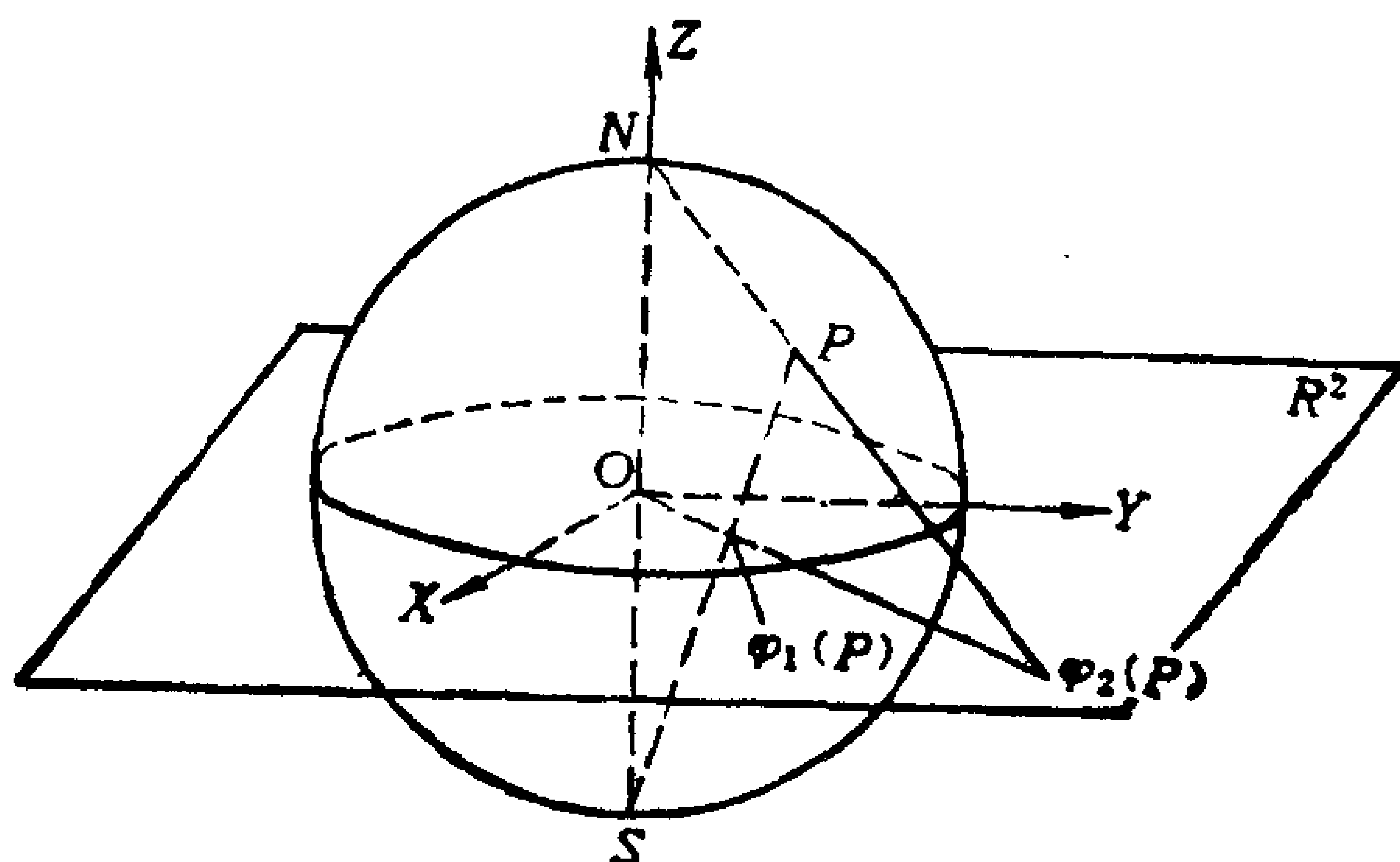


图 2.3

交XOY平面于点（u，v，0）。将（u，v）作为U_1上P点所对应的坐标。类似地，φ_2：$U_2 \to R^2$是以北极N为投影中心的球极投影，把（$\bar{u}$，$\bar{v}$）作为U_2上P点所对应的坐标。若$P \in U_1$，通过简单的计算得

$$\varphi_1: \quad u = \frac{rx}{r+z} \qquad v = \frac{ry}{r+z}$$

因此解出x，y，z，即得

$$\varphi_1^{-1}: \quad x = \frac{2r^2 u}{u^2+v^2+r^2} \qquad y = \frac{2r^2 v}{u^2+v^2+r^2}$$

$$z = \frac{r\,(r^2-u^2-v^2)}{u^2+v^2+r^2}$$

显然φ是U_1到R^2中开圆$u^2+v^2<3r^2$的同胚。同理可得

$$\varphi_2: \quad \bar{u} = \frac{rx}{r-z} \qquad \bar{v} = \frac{ry}{r-z}$$

$$\varphi_2^{-1}: \quad x = \frac{2r^2 \bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+r^2} \qquad y = \frac{2r^2 \bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+r^2}$$

$$z = \frac{r\,(\bar{u}^2+\bar{v}^2-r^2)}{\bar{u}^2+\bar{v}^2+r^2}$$

φ_2是U_2到R^2中开圆$\bar{u}^2+\bar{v}^2<3r^2$的同胚。

对于$D=U_1\cap U_2$内的点$P(x, y, z)$。容易推出

$$\bar{u}=\frac{r^2u}{u^2+v^2} \qquad \bar{v}=\frac{r^2v}{u^2+v^2}$$

$$u=\frac{r^2\bar{u}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2} \qquad v=\frac{r^2\bar{v}}{\bar{u}^2+\bar{v}^2}$$

因为在D内，$u^2+v^2>0$，$\bar{u}^2+\bar{v}^2>0$，所以$\bar{u}$，$\bar{v}$是(u, v)的C^∞函数，反之也一样。根据命题2，球面S^2连同由(U_1,φ_1)，(U_2, φ_2)确定的微分构造成为C^∞-流形。

（4）开子流形。C^∞-流形M的开子集V还是一个微分流形。设(U, φ)是任一与V相交的M中的局部坐标系。命$U'=U\cap V$，$\varphi'=\varphi|_{U\cap V}$，则$(U', \varphi')$的全体构成$V$的微分构造。

（5）一般线性群$Gl(n, R)$

设$M=\{n\times n$矩阵$(a_{ij})\}$，令$A=(a_{ij})$对应于$(a_{11}, \cdots, a_{1n}, a_{21}, \cdots, a_{2n}, \cdots, a_{n1}, \cdots, a_{nn})$，则$M\approx R^{n2}$。根据例(1)，$M$是$n^2$-流形。注意

$\mathrm{Gl}(n, R)=\{A\in M; \det A\neq 0\}$它是$M$的开子集，由(4)，$\mathrm{Gl}(n, R)$是$M$的开子流形。

（6）积流形　若(M_1, Φ_1)和(M_2, Φ_2)分别是m维和n维的C^∞-流形。那么$M_1\times M_2$是$m+n$维C^∞-流形。它的微分构造是由如下的坐标卡所确定的：

$$\{(U_\alpha\times V_\beta, \varphi_\alpha\times\varphi_\beta); (U_\alpha, \varphi_\alpha)\in\Phi_1,$$
$$(V_\beta, \varphi_\beta)\in\Phi_2, \varphi_\alpha\times\varphi_\beta: (x, y)\to(\varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(y))$$
$$\in R^m\times R^n, x\in U_\alpha, y\in V_\beta\}$$

积流形的一个重要例子是环面$T^2=S^1\times S^1$，它是两个圆周的积。更一般的，$T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n个}$是$n$维环面，它是圆的$n$重积，也是$C^\infty$-流形。

（7）实射影空间RP^m

设 x，$y\in R^{m+1}-\{0\}$，如果有 $\alpha\in R$ 存在，使 $x=\alpha y$，则称 x，y 是等价的，由 x 决定的等价类记作 $[x]=[x^1, x^2, \cdots, x^{m+1}]$，命

$$RP^m=\{[x];\ x\in R^{m+1}-[0]\}$$

称为 m 维（实）射影空间

例如，RP^2 就是 R^3 中经过原点的所有直线构成的空间，可以证明，RP^m 是 Hausdorff 的且满足第二可数公理。RP^m 上的微分构造可如下规定：引进一组坐标卡

$$U_i=\{[x]=[x^1, \cdots, x^{m+1}];\ x^i\neq 0\},\ i=1,\cdots,m+1$$

$$\varphi_i(x^1, \cdots, x^{m+1})=\left(\frac{x^1}{x^i}, \cdots, \frac{x^{i-1}}{x^i}, \frac{x^{i+1}}{x^i}, \cdots, \frac{x^{m+1}}{x^i}\right)$$

在 $U_i\cap U_j$ 中，$\dfrac{x^k}{x^j}=\dfrac{x^k/x^i}{x^j/x^i}$，$k\neq i$，$j$

$$x^i/x^j=\frac{1}{x^j/x^i}$$

这些坐标变换都是有理函数。所以 RP^m 是 m 维解析流形。

（8）Grassmann 流形

令 $G_r(R^n)=\{R^r;\ R^r$ 是 R^n 的 r 维子空间，$0<r<n\}$。设

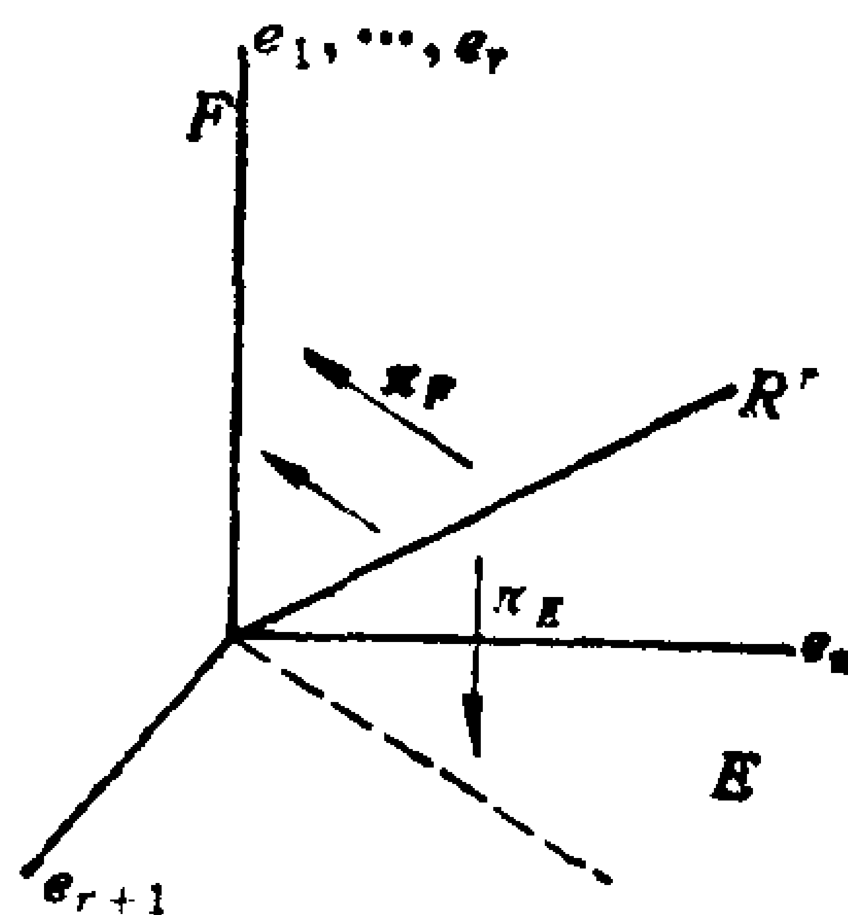


图 2.4

E 是 R^n 的 $n-r$ 维子空间，$U(E)=\{R^r\subset R^n;\ R^r\cap E=\{0\}\}$，则 $G_r(R^n)=\bigcup\limits_E(E)$，可以在 $G_r(R^n)$ 上定义拓扑，使所有的

$U(E)$ 都是开集。

设E的基为 e_{r+1}, …, e_n, 再扩张到R^n上，得到e_1, …, e_r, e_{r+1}, …, e_n. 其中e_1, …, e_r张成子空间F,则任一$R^r\in U(E)$唯一确定了投影π_F: $R^r\to F$和π_E: $R^r\to E$. 而且π_F是同胚. 因此唯一确定了线性映射 $h=\pi_E\circ\pi_F^{-1}$: $F\to E$. 反之，h也唯一确定一个$R^r\in U(E)$. 所以有同胚映射

$$\varphi:\ U(E)\to L(R^r,\ R^{n-r})$$

令$M(r,\ n-r)$表示全体$r\times(n-r)$矩阵之集，则

$$U(E)\cong M(r,\ n-r)\cong R^{r(n-r)}$$

这样，在每个$U(E)$上规定了坐标映射，不难验证，它们是C^∞相容的. 因此，$G_r(R^n)$是实解析流形，当$r=1$时，$G_r(R^n)=RP^{n-1}$.

5. 可微映射和可微函数

定义 3 设M和N分别为m维和n维C^∞流形，映射

$$F:\ M\to N$$

如果对于$\forall P\in M$, $\exists P$的坐标卡$(U,\ \varphi)$和$F(P)$的坐标卡$(V,\ \psi)$, 使得$F(U)\subseteq V$, 而且映射

$$\psi\circ F\circ\varphi^{-1}:\ \varphi(U)\to\psi(V)$$

是C^∞的，则称F是由M到N的C^∞映射。

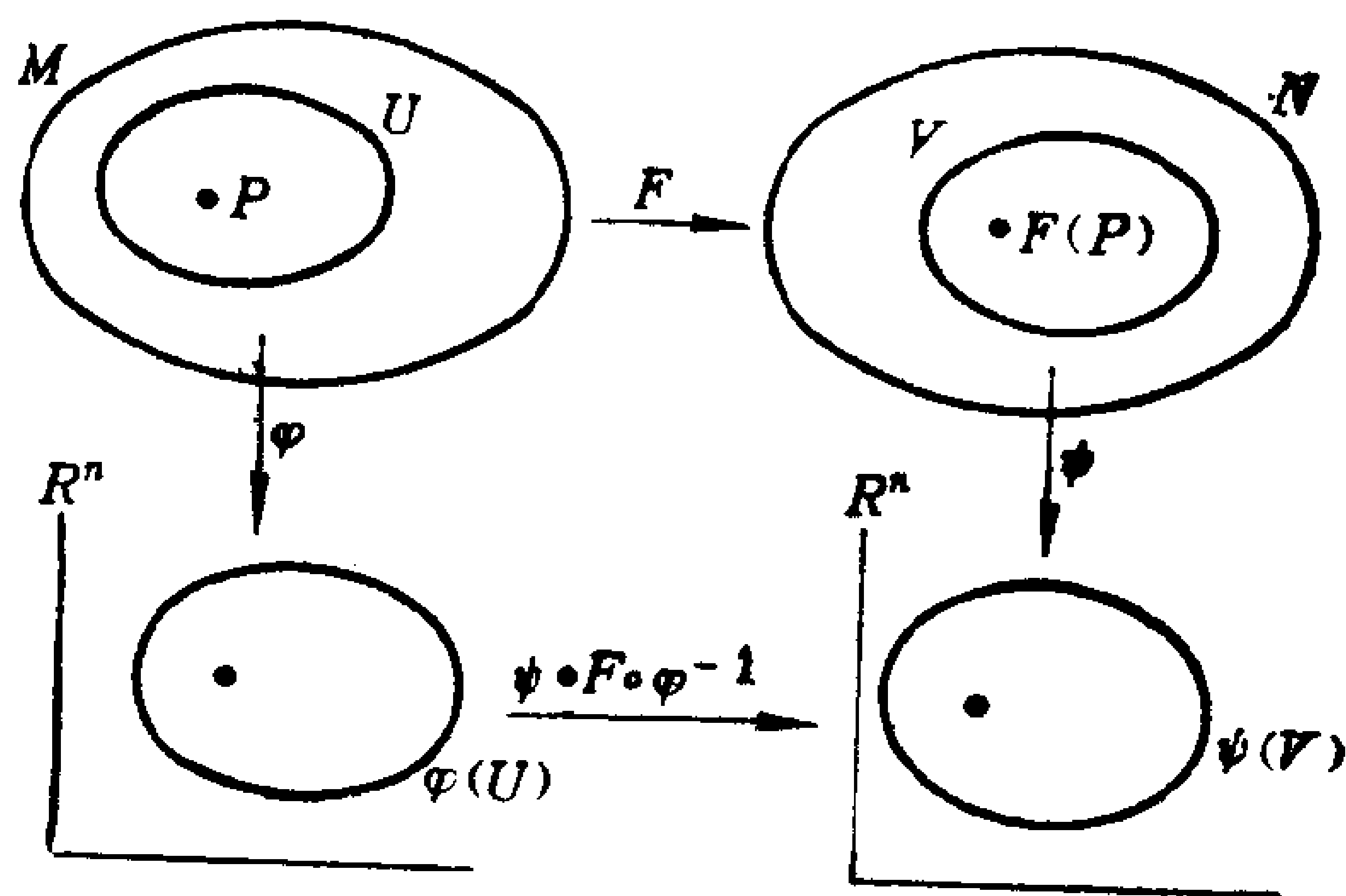


图 2.5

注意：定义与坐标卡的选择无关。因为若在P和$F(P)$处选取另外的坐标卡时。由于微分流形的坐标卡之间是C^∞相容的。在一对坐标卡之间的C^∞映射。在另外的坐标卡之间也是C^∞映射。

当定义中的$N=R$时，我们可取ψ：$R\to R$为恒同映射，这时F：$M\to R$的C^∞性依赖于

$$F\circ\varphi^{-1}:\ \varphi(U)\to R$$

的C^∞性。当满足此条件时，称F：$M\to R$为M上的C^∞函数。

例 M是C^∞流形，(U,φ)是一坐标卡

$$r^i:\ R^n\to R$$

使$r^i(a^1,\cdots,a^i,\cdots,a^n)=a^i$，则$x^i=r^i\circ\varphi$：$U\to R$称为$(U.\varphi)$的坐标函数。显然，坐标函数$x^i$，$i=1,\cdots,n$是$C^\infty$函数。

最后给出可微映射的一个等价定义：

映射

$$F:\ M\to N$$

如果对于N上任一C^∞函数g：$N\to R$，都有

$$g\circ F:\ M\to R$$

是M上的C^∞函数，则称F为从M到N的C^∞映射。

§2.2 切空间与切映射

1. R^n中一点处的切向量

设a是R^n中一点，所谓a点附近的C^∞函数f是指定义在a的某个邻域U上的C^∞函数。我们在a点附近的所有C^∞函数中定义一种等价关系：函数$f\sim g$，当而仅当在a的某个邻域中$f\equiv g$。用$[f]$表示由f代表的等价类。每个等价类称为a点处一个C^∞**函数芽**（germ）。a点处的全体C^∞函数芽的集合用$C^\infty(a)$来表示。

定义 1

$$[f]+[g]=[f+g]$$
$$k[f]=[kf],\quad k\in R$$

即由 a 点邻近函数的运算诱导出函数芽的运算。因此，a 点处 C^∞ 函数芽构成向量空间。

如果再定义

$$[f]\cdot[g]=[f\cdot g]$$

则 $C^\infty(a)$ 构成实数域上的代数。

为了书写方便，以后用到芽$[f]$时，省去括号只写 f。

在 R^n 中以 a 点为起点的全体向量构成一个 n 维向量空间，即

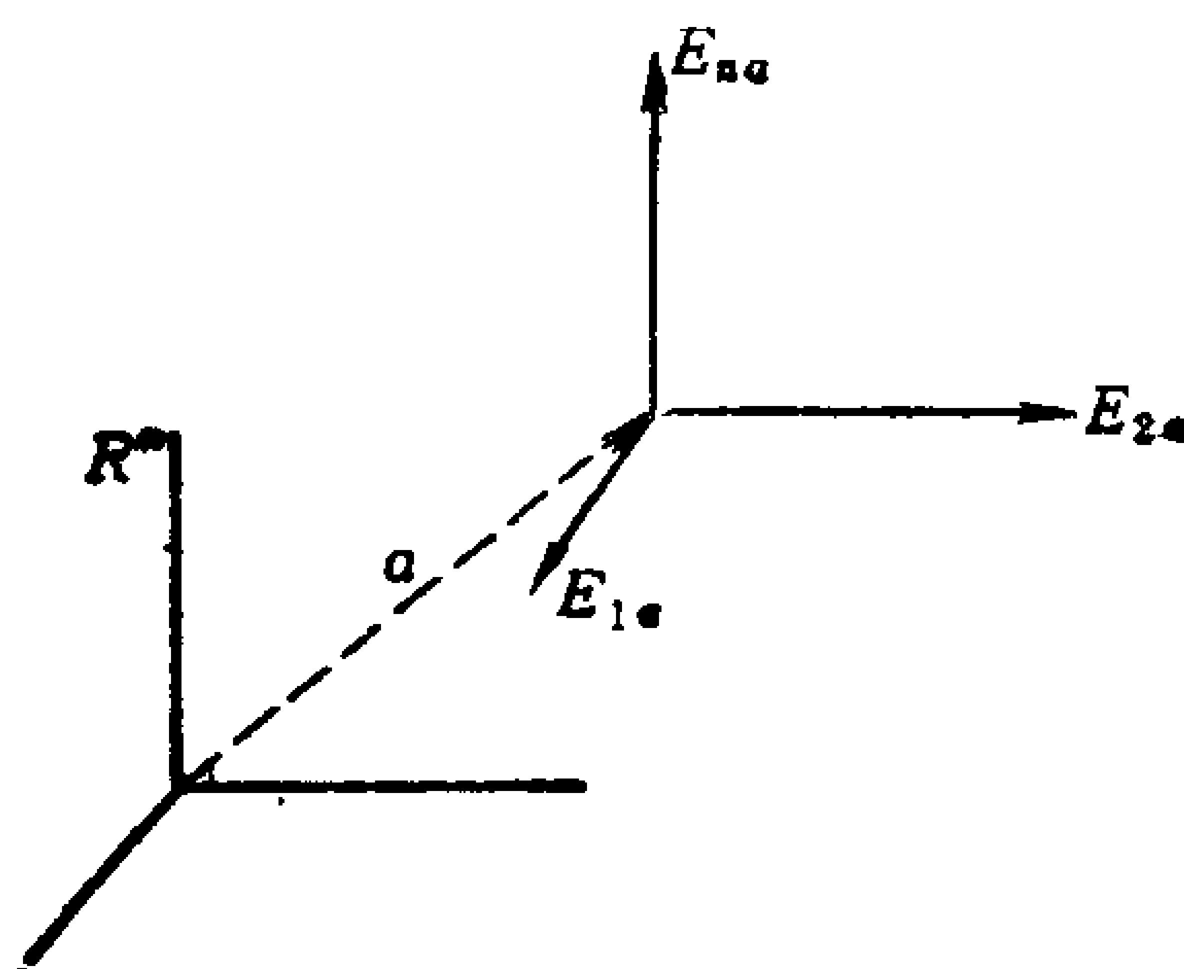


图 2.6

R^n 在 a 点处的切空间，记成 $T_a(R^n)$。显然有同构关系

$$T_a(R^n)\cong R^n$$

设 E_{1a}, E_{2a}, …, E_{na} 表示由原 R^n 中标准正交基平移到 a 所得到的 $T_a(R^n)$ 的一组标准正交基。则 $T_a(R^n)$ 中任一向量 X_a 可表示为

$$X_a=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i E_{ia}$$

设 $f\in C^\infty(a)$，用$\Delta f=\sum\limits_{i=1}^{a}\alpha^i\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_a$ 来表示函数 f 在 a 点沿方向X_a 的方向导数。因为 Δf 依赖于 f，点 a 及方向X_a，因此用 X_a^*f 表示更好。这样

$$X_a^* f = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_a$$

当 X_a 给定后，任一 $f \in C^\infty(a)$ 唯一地确定了一个实数 $X_a^* f$。因此 $f \to X_a^* f$ 定义了映射

$$X_a^*: C^\infty(a) \to R$$

用 $X_a^* = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_a$ 表示这个映射是合理的。我们称 X_a^* 为 X_a 方向的方向导子。由于 $X_a^*(x^i) = \alpha^i$，所以只要知道 X_a^* 在坐标函数 $x^i = r^i(x)$ 上的值，向量 X_a 和映射 X_a^* 就完全确定了。

由导数的性质，容易看出：如果 $\alpha, \beta \in R$，$f, g \in C^\infty(a)$，则

（1）$X_a^*(\alpha f + \beta g) = \alpha(X_a^* f) + \beta(X_a^* g)$，

（2）$X_a^*(f \cdot g) = (X_a^* f) g(a) + f(a)(X_a^* g)$。

2．导子空间

定义 2 命 $\mathscr{D}(a)$ 表示具有上述性质（1）、（2）的映射 $C^\infty(a) \to R$ 的全体，即

$$\mathscr{D}(a) = \{D: C^\infty(a) \to R \text{ 满足条件（1）、（2）}\}$$

这些 $D \in \mathscr{D}(a)$ 称为 $C^\infty(a) \to R$ 的导子（derivation）。

如果对于 $\forall D_1, D_2 \in \mathscr{D}(a)$；$\alpha, \beta \in R$，$f \in C^\infty(a)$，定义

$$(\alpha D_1 + \beta D_2) f = \alpha D_1 f + \beta D_2 f$$

其中右边的运算是在 R 中进行的。那么容易证明 $\mathscr{D}(a)$ 是实数域 R 上的向量空间，**我们称它为导子空间**。

定理 1 $T_a(R^n) \approx \mathscr{D}(a)$（向量空间的同构）

为了证明定理，先给出两个引理

引理 1 命 D 是 $\mathscr{D}(a)$ 中任一导子，$f \in C^\infty(a)$ 是 a 的某邻域中的常值函数，则 $Df = 0$。

证明：因为 D 是线性的，只须证明：如果 1 表示取值为 1 的常函数，则 $D1 = 0$。注意

$D1 = D(1 \cdot 1) = (D1) \cdot 1 + 1 \cdot (D1) = 2D1$，$\therefore D1 = 0$。‖

引理 2 命 $f(x^1, \cdots, x^n)$ 是在某开集 U 上定义的 C^∞－函数。如果 $a \in U$，则存在 a 的一个邻域 $B \subset U$，以及定义在 B 上的 C^∞－函数 $g^1, \cdots, g^n$，使得

(1) $g^i(a) = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{x=a}$，

(2) $f(x^1, \cdots, x^n) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}(x^i - a^i)g^i(x)$。

证明：命 $B \subset U$ 是 a 的一个球域，注意对于 $x \in B$

$$f(x) = f(a) + \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} f(a + t(x-a))dt$$

因此，

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^{n}(x^i - a^i)\int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{a+t(x-a)} dt$$

命

$$g^i(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_{a+t(x-a)} dt, \quad i = 1, \cdots, n$$

这些是 C^∞ 函数且满足要求的两个条件。‖

定理的证明：由于给定了 $X_a \in T_a(R^n)$。就唯一确定了 $X_a^* \in \mathscr{D}(a)$。这样决定了一个映射

$$T_a(R^n) \to \mathscr{D}(a)$$

(1) 此映射是一一的。因为，如果有 $X_a^* = Y_a^*$，则对于 $\forall f \in C^\infty(a)$。有 $X_a^* f = Y_a^* f$，特别对坐标函数 x^j 有

$$X_a^*(x^j) = Y_a^*(x^j)$$

设 $X_a = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i E_{ia}$，$Y_a = \sum_{i=1}^{n} \beta^i E_{ia}$，则

$$X_a^*(x^j) = \Sigma \alpha^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \alpha^j$$

$$Y_a^*(x^j) = \Sigma \beta^i \frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \beta^j$$

$\therefore \qquad \alpha^i=\beta^i$， 即 $\quad X_a=Y_a$

（2）此映射保持代数结构。若 $Z_a=\alpha X_a+\beta Y_a$； $\alpha,\beta\in R$，则对任意的$f\in C^\infty(a)$，有

$$\begin{aligned}
Z_a^*(f)&=(\alpha X_a+\beta Y_a)^*f\\
&=\sum_{i=1}^{n}(\alpha\alpha^i+\beta\beta^i)\frac{\partial f}{\partial x^i}\\
&=\alpha\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial f}{\partial x^i}+\beta\sum_{i=1}^{n}\beta^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\\
&=\alpha X_a^*f+\beta Y_a^*f=(\alpha X_a^*+\beta Y_a^*)f
\end{aligned}$$

（3）此映射是在上的。即要证明对于 $\forall D\in\mathscr{D}(a)$，存在 $X_a\in T_a(R^n)$，使得$X_a^*=D$

任给 $D\in\mathscr{D}(a)$，设 $r^i(x^1,\cdots,x^n)=x^i$，$i=1,\cdots,n$ 是坐标函数，再设$Dr^i=\alpha^i$。考虑向量 $X_a=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha^iE_{ia}$，它对应的导子为$X_a^*$，有

$$X_a^*f=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_a$$

另一方面，根据引理2，在f的定义域中的某个开球B上，有

$$f(x)=f(a)+\sum_{i=1}^{n}(x^i-a^i)g^i(x)$$

所以

$$\begin{aligned}
Df&=Df(a)+\sum_{i=1}^{n}\{D(x^i-a^i)g^i(a)+0\cdot Dg^i(x)\}\\
&=\sum_{i=1}^{n}Dx^i\cdot g^i(a)=\sum_{i=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_a=X_a^*f
\end{aligned}$$

由于f是任意的，所以$D=X_a^*$▌

定理允许我们把R^n在一点a处的切空间$T_a(R^n)$与导子空间$\mathscr{D}(a)$等同起来。在这种等同下，$T_a(R^n)$的标准基E_{1a}，…，E_{na}等同于$\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_a$，…，$\left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_a$，其中$\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a$是在坐标轴方向上的方向导子，即

$$E_{ia}\mapsto E_{ia}^*=\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_a$$

做了这种等同之后，可以将∗号去掉，X_a^*f将写成X_af。今后，欧氏空间中的向量给了我们关于在一点的切空间的几何直观，而在形式定义和证明中，我们将利用上面的思想：在一点的一个切向量，是在$C^\infty(a)$上的满足导子乘积法则（也称为Leibniz法则）的线性算子。对于切向量的这种观点，除了它的形式化和抽象性外，它相对地更容易运用。我们将利用这种观点把切向量推广到微分流形上。

3. 流形上的切向量

定义 3 M是C^∞的n维流形，$a\in M$，$C^\infty(a)$是a点处全体C^∞实函数芽的集合，则M在a点的切向量是实值函数

$$X_a: C^\infty(a)\to R$$

满足

(1) $X_a(\alpha f+\beta g)=\alpha X_af+\beta X_ag$

(2) $X_a(f\cdot g)=(X_af)\cdot g(a)+f(a)(X_ag)$

其中α，$\beta\in R$；f，$g\in C^\infty(a)$

定义 4 M在a点的全体切向量的集合记成$T_a(M)$或M_a或$T(M, a)$。当规定

$$(X+Y)f=Xf+Yf$$

$$(bX)f=b(Xf)$$

运算法则后，$T_a(M)$构成向量空间，称为M在a点的**切空间**。

不难验证此定义是合理的。

下面要给出切向量在局部坐标系下的坐标表示。

设(U, φ)是包含a点的局部坐标系。其中坐标为$(x^1, \cdots, x^n)$，$i=1, \cdots, n$，$f\in C^\infty(a)$，定义

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a f=\frac{\partial(f\circ\varphi^{-1})}{\partial r^i}(\varphi(a))$$

其中r^i是R^n中的坐标函数，容易验证$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$是$M$在$a$点处的切向量。

引理 3 设$x^1, \cdots, x^n$是$U\ni a$的局部坐标，且使$x^i(a)=0$，$i=1, \cdots, n$。则对于$\forall f\in C^\infty(a)$，存在n个函数$f_1, \cdots, f_n\in C^\infty(a)$使得

$$f_i(a)=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a f$$

而且在a的某个邻域中

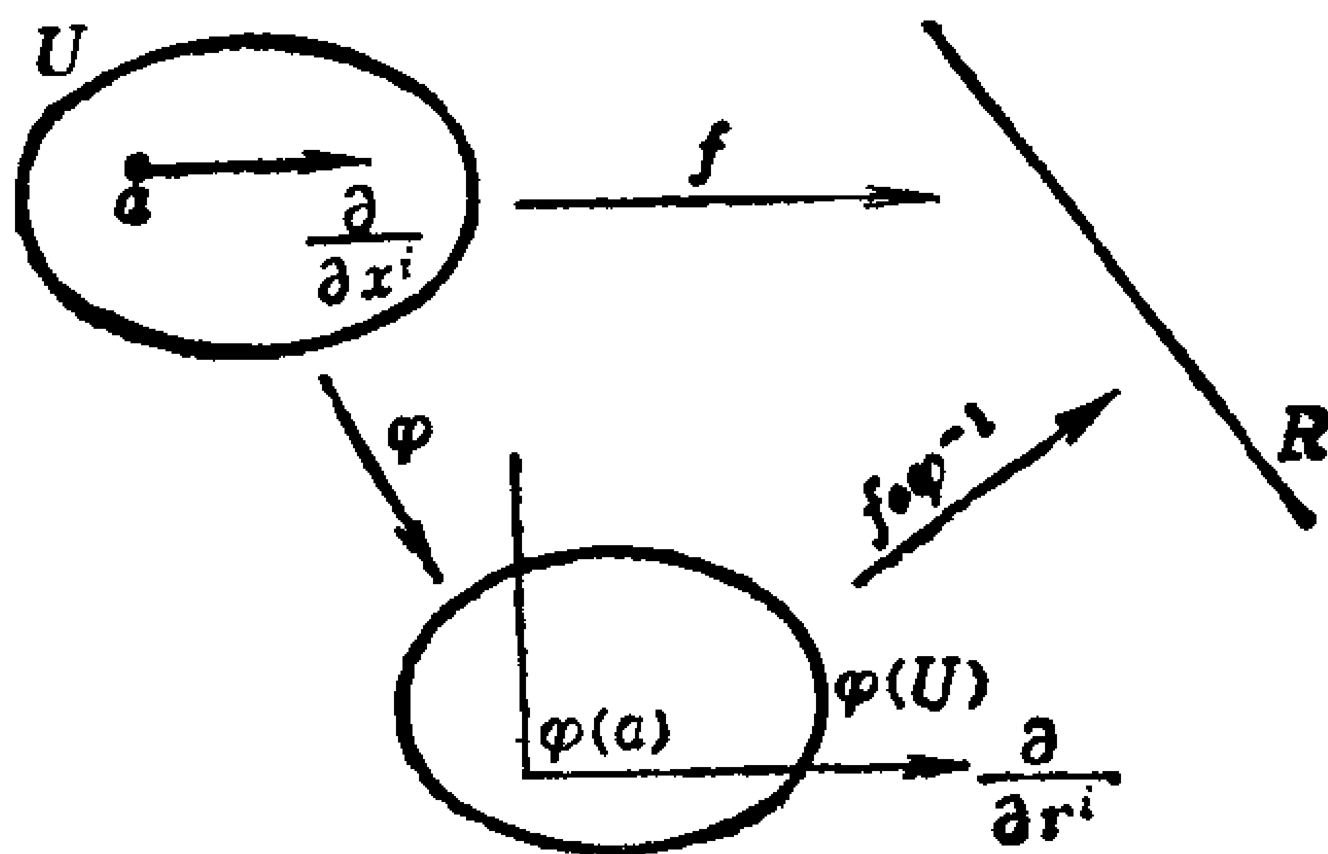


图 2.7

$$f=f(a)+\sum_{i=1}^{n}x^i f_i$$

证明可参看引理 2。

定理 2 设M是C^∞流形，点$a\in M$附近的局部坐标为$(x^1, \cdots, x^n)$，如果$X_a\in M_a$，则

$$X_a=\sum_{i=1}^{n}(X_a x^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$$

而且$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a, \quad i=1, \cdots, n\right\}$形成$M_a$的一组基。

证明：设$X_a \in M_a$，$f \in C^\infty(a)$。在局部坐标系下，如果$x^i(a) \neq 0$，$i=1, \cdots, n$。可令$y^i = x^i - x^i(a)$，则$y^i(a)=0$，$i=1, \cdots, n$。而且

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y^i}\right)_a = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_a$$

设$c \in C^\infty(a)$是常值函数芽，则

$$X_a(c) = cX_a(1) = cX_a(1) + cX_a(1) = 2cX_a(1) = 2X_a(c)$$

$$\therefore \quad X_a(c) = 0$$

再根据引理3：

$$X_a f = X_a\left[f(a) + \sum_{i=1}^{n} y^i \cdot f_i\right]$$

$$= X_a[f(a)] + \sum_{i=1}^{n} [(X_a y^i) f_i(a) + y^i(a)(X_a f_i)]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_a(x^i - x^i(a)) f_i(a)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (X_a x^i) \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_a$$

$$\therefore \quad X_a = \sum_{i=1}^{n} (X_a x^i) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$$

最后再证明$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a, \quad i=1, \cdots, n\right\}$是线性无关的就够了。设

$$Y_a = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a = 0$$

则

$$Y_a x^j = a^j = 0, \quad j = 1, \cdots, n$$

所以，$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a, \quad i = 1, \cdots, n\right\}$线性无关，构成$M_a$的一组基。‖

由此可见，n维流形在其上任一点处存在唯一的切空间，在局部坐标系下，它是由$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$，$i = 1, \cdots, n$为基张成的$n$维向量空间。由于我们采取了“导子”的抽象定义，显而易见，切向量与切空间的概念与坐标系的选取无关。在不同的局部坐标系下，它们只不过有不同的坐标表示罢了。

设U，V是M的局部坐标域，且$U \cap V \neq \Phi$。并且$(x^1, \cdots, x^n)$是(U, φ)的坐标函数，$(y^1, \cdots, y^n)$是(V, ψ)的坐标函数，则在$a \in U \cap V$处，对于$f \in C^\infty(a)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^j}(f) &= \frac{\partial}{\partial r^j}(f \circ \varphi^{-1}) \\
&= \frac{\partial}{\partial r^j}(f \circ \psi^{-1} \circ \psi \circ \varphi^{-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r^i}(f \circ \psi^{-1}) \circ \frac{\partial}{\partial r^j}(r^i \circ \psi \circ \varphi^{-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial f}{\partial y^i}
\end{aligned}$$

这就是坐标变换之下基变换的公式。

4．切映射

定义 4 若M和N都是C^∞流形，$F: M \to N$是一C^∞映射，F在$x \in M$的微分dF是一映射

$$dF: M_x \to N_{F(x)}$$

使得对于$X \in M_x$，$g \in C^\infty(F(x))$，有

$$dF(X)(g) = X(g \circ F)$$

dF有时记成DF，F'等，更经常记成F_*，也称为映射F在x点的切映射。

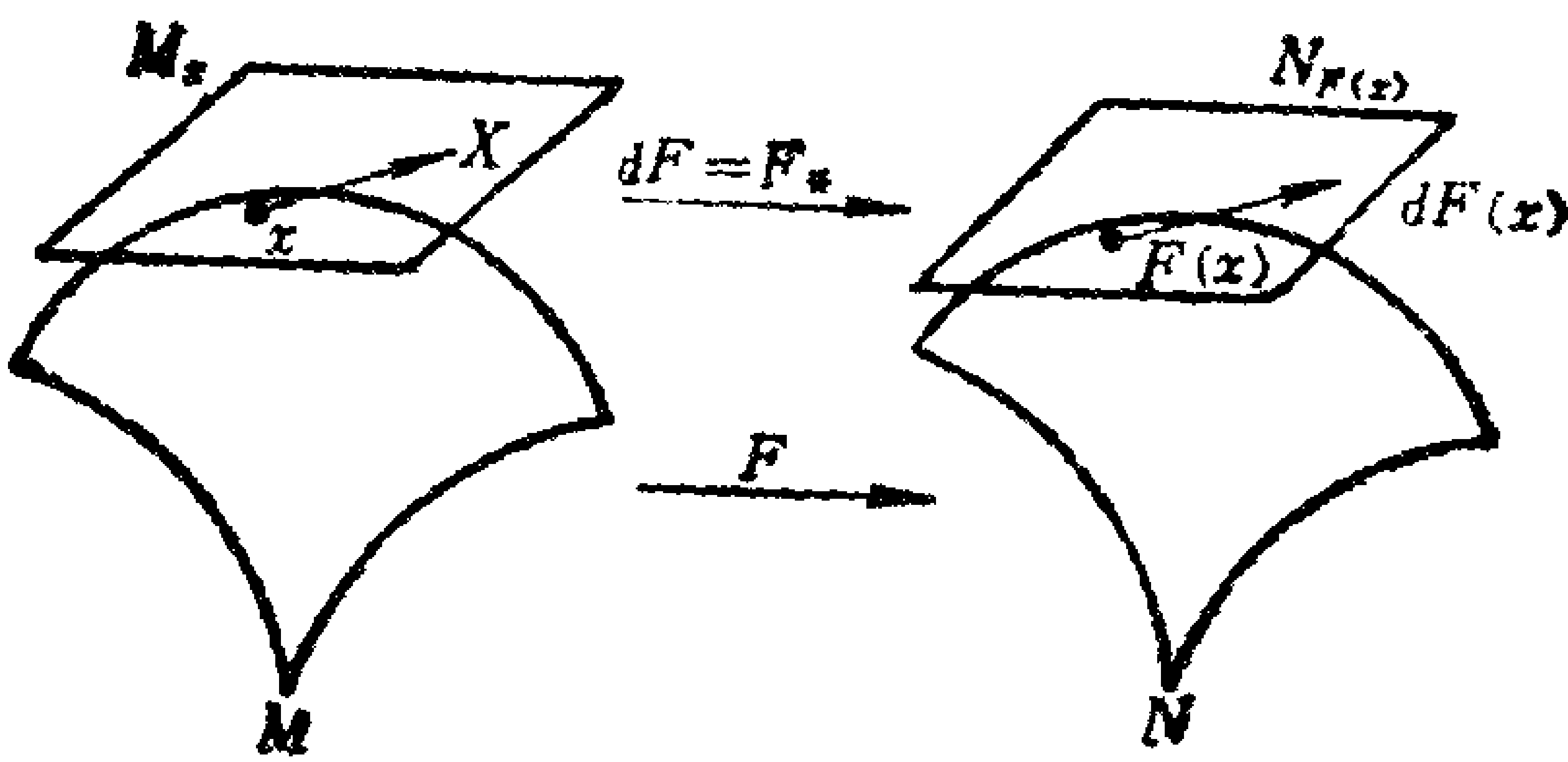


图 2.8

容易证明，$dF(X)$确是$F(x)$点处的切向量，因此上面的定义是合理的，这只要证明$dF(X)$满足导子的两条性质就够了。

由定义还可看出，切映射是线性的。

下面考虑切映射的坐标表示。设M上a点处的局部坐标系是$(U,\ \varphi)$，显然$\varphi: U\to\varphi(U)\subseteq R^m$是$C^\infty$的，而且$\varphi^{-1}:\varphi(U)\to U$也是$C^\infty$的。

$$\varphi_*^{-1}: T_{\varphi(a)}(R^m)\to T_aM$$

对于$T_{\varphi(a)}(R^m)$的基向量

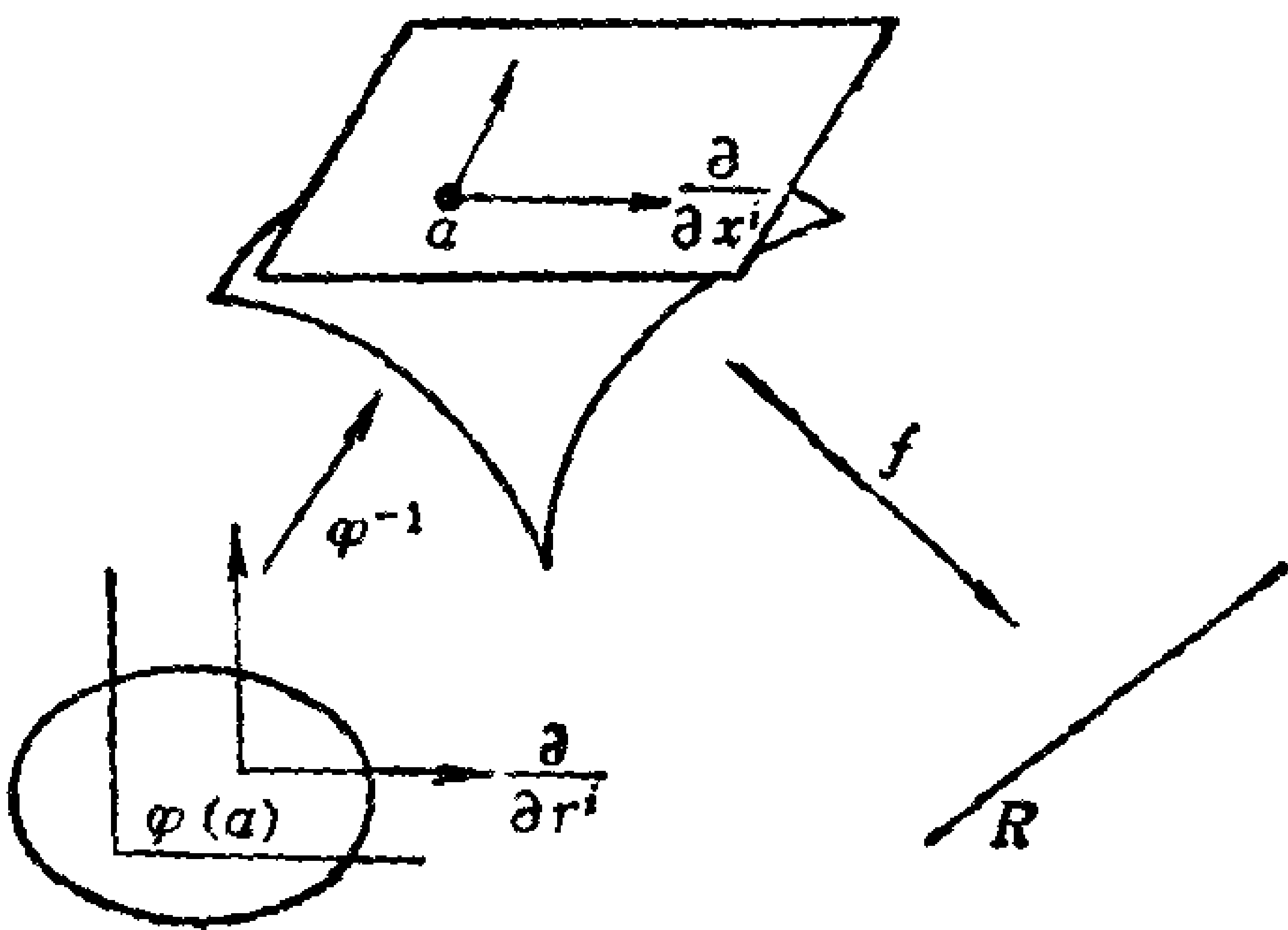


图 2.9

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right)_{\varphi(a)}\left[\varphi_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right)_{\varphi(a)}\right]f=\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right)_{\varphi(a)}(f\circ\varphi^{-1})=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a$$

f 即在 φ_*^{-1} 之下，$\frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 $\frac{\partial}{\partial r^i}$ 的像。

再设N上$F(a)$点处的局部坐标系是(V, ψ)，以$(y^1, \cdots, y^n)$为坐标。以上的讨论对N都是成立的。

映射$F: M\to N$在上述局部坐标系之下，可表示为

$$\begin{cases} y^1=y^1(x^1, \cdots, x^m)\\ y^2=y^2(x^1, \cdots, x^m)\\ \cdots\cdots\\ y^n=y^n(x^1, \cdots, x^m)\end{cases}$$

设$X=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a\in M_a$，$g\in C^\infty(F(a))$

则

$$\begin{aligned}
&[dF(X)]g=X(g\circ F)\\
&=\sum_{i=1}^{m}\alpha^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_a(g\circ F)\\
&=\sum_{i=1}^{m}\alpha^i\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right)_{\varphi(a)}(g\circ F\circ\varphi^{-1})\\
&=\sum_{i=1}^{m}\alpha^i\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right)_{\varphi(a)}(g\circ\psi^{-1}\circ\psi\circ F\circ\varphi^{-1})\\
&=\sum_{i=1}^{m}\alpha^i\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial s^j}\right)_{\psi\circ F(a)}(g\circ\psi^{-1})\cdot\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right)_{\varphi(a)}\\
&\quad\times(s^j\circ\psi\circ F\circ\varphi^{-1})\\
&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha^i\frac{\partial g}{\partial y^j}\bigg|_{F(a)}\cdot\frac{\partial}{\partial x^i}(y^j\circ F)\bigg|_a\\
&=\left[\sum_{j=1}^{n}X(y^j\circ F)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{F(a)}\right]g
\end{aligned}$$

其中s^j是R^n中的坐标函数，r^i是R^m中的坐标函数。

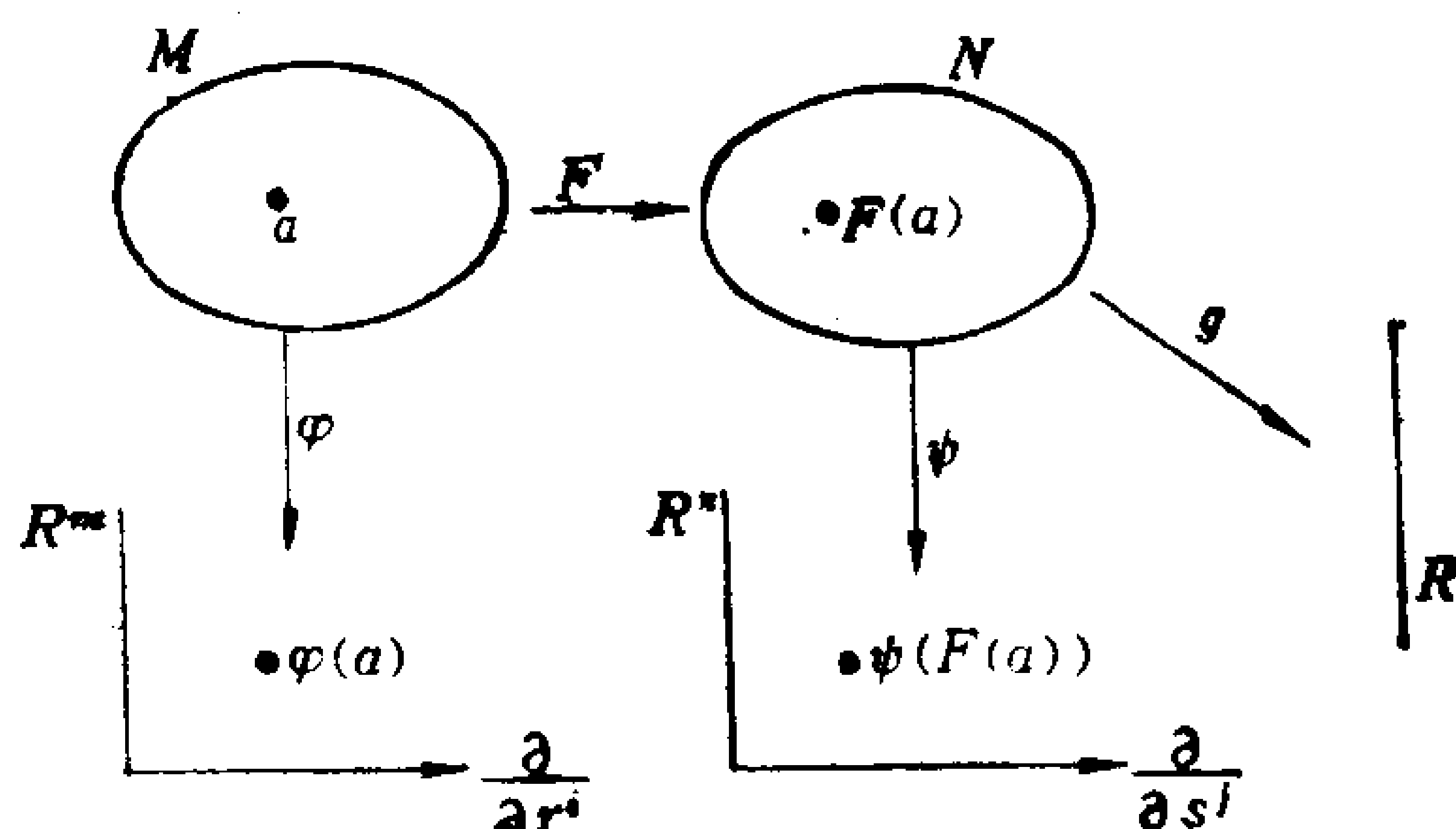


图 2.10

$$\therefore\ dF(X)=\sum_{j=1}^{n} X(y^j\circ F)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_{F(a)}$$

如果取X的基向量$\frac{\partial}{\partial x^i}$，则有

$$dF\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x^i}(y^j\circ F)\frac{\partial}{\partial y^j}$$

其中省略了下标。矩阵

$$(dF)=\left(\frac{\partial}{\partial x^i}(y^j\circ F)\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial y^1}{\partial x^1}, & \cdots, & \frac{\partial y^1}{\partial x^m}\\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \frac{\partial y^n}{\partial x^1}, & \cdots, & \frac{\partial y^n}{\partial x^m}\end{pmatrix}$$

称为映射$F:M\to N$在点$a\in M$处，在基$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$和$\left\{\frac{\partial}{\partial y^j}\right\}$之下的Jacobian。映射下的Jacobian的秩称为映射F的秩，对M的不同点，其秩也可能不同。

命题 若M是连通C^∞流形，N是C^∞流形，$F:M\to N$是C^∞映射，如果对每一点$x\in M$，$dF\equiv 0$，则F是常映射。

证明：命 $y\in F(M)$，$F^{-1}(y)$是闭的，我们将证明它也是开的。为此，设 $x\in F^{-1}(y)$，分别选择 x 和 y 的坐标卡为 $(U, x^1, \cdots, x^m)$和$(V, y^1, \cdots, y^n)$，使得$F(U)\subseteq V$，那么在U上

$$0=dF\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial(y^j\circ F)}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}$$

$$(i=1, \cdots, m),$$

所以

$$\frac{\partial(y^j\circ F)}{\partial x^i}\equiv 0 \quad (i=1, \cdots, m, \ j=1, \cdots, n)$$

因此函数$y^j\circ F$在U上是常函数，由此推出$F(U)=y$。这样$F^{-1}(y)$是开的，又因M是连通的，所以有

$$F^{-1}(y)=M$$

即

$$F(M)=y \quad \|$$

最后说明切映射的链法则成立。若$F:M\to N$，$G:N\to P$都是C^∞映射。则

$$d(G\circ F)_x=dG_{F(x)}\circ dF_x$$

证明：设$X\in M_x$，$h\in C^\infty(G\circ F(x))$，则

$[d(G\circ F)X]h=X(h\circ(G\circ F))=X((h\circ G)\circ F)$

$=dF(X)(h\circ G)=[dG\circ dF(X)](h)$。$\|$

作为特例，我们看到C^∞流形M的某一坐标域U，它是M的开子集，本身也是一C^∞流形。包含映射

$$i:U\to M$$

是C^∞映射，则切映射

$$d_i:U_x\to M_x(x\in U)$$

是向量空间的同构，今后我们将把这两个向量空间等同起来。

5．流形上一条曲线的切向量

定义 5 C^∞映射$\sigma:(a, b)\to M$称为M中一条光滑曲线。设$t\in(a, b)$，那么曲线σ在t的切向量是

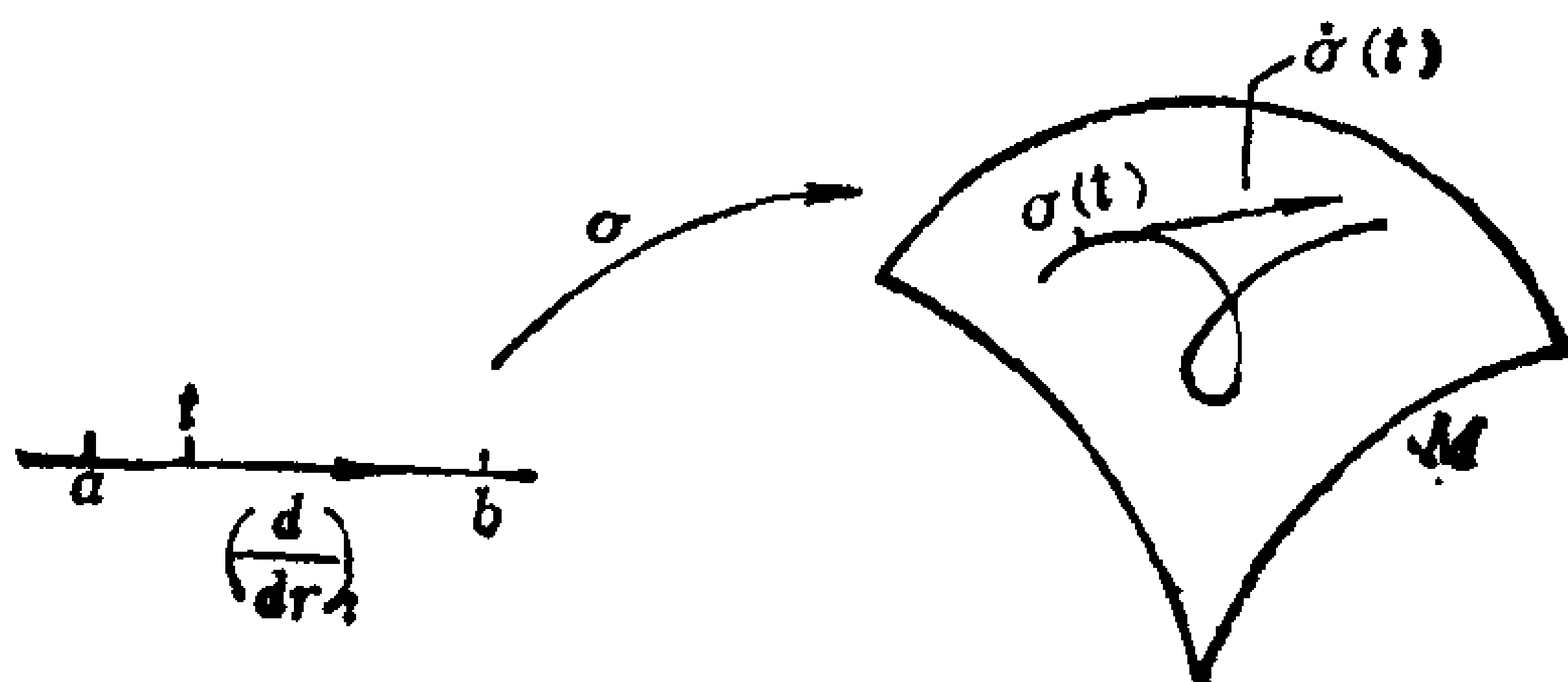


图 2.11

$$d\sigma\left(\frac{d}{dr}\bigg|_t\right)\in M_{\sigma(t)}$$

简记成$\dot\sigma(t)$。如果$\sigma(t)$的局部坐标取为$(U, x^1, \cdots, x^n)$，则

$$\begin{aligned}\dot\sigma(t)&=\sigma_*\left(\frac{d}{dr}\right)_t\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{d}{dr}\right)_t(x^i\circ\sigma)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\sigma(t)}\end{aligned}$$

设$F:M\to N$是C^∞映射，$X\in M_x$，过x点作一C^∞一曲线$\sigma:(a, b)\to M$，使得$X=\dot\sigma(t)|_0=d\sigma\left(\frac{d}{dr}\right)_{t=0}=0$。根据链法则，$X$在$dF_x$下的像$Y$可表示为

$$\begin{aligned}Y&=dF(X)=dF\left(d\sigma\left(\frac{d}{dr}\right)_{t=0}\right)\\&=d(F\cdot\sigma)\left(\frac{d}{dr}\right)_{t=0}\end{aligned}$$

也就是说流形N在$F(x)$点的切向量$Y=dF(X)$正好是C^∞一曲线$F\circ\sigma:(a, b)\to N$在$t=0$处的切向量。这给出了由切向量$X\in M_x$求对应的切向量$Y=dF(X)\in N_{F(x)}$的一个直观方法。

作为一个特例，如果$M=R^n$，这时$\sigma:(a, b)\to R^n$是欧氏空间R^n中的一条光滑曲线。那么

$$\dot{\sigma}(t)=\frac{d\sigma^1}{dt}\frac{\partial}{\partial r^1}+\cdots+\frac{d\sigma^n}{dt}\frac{\partial}{\partial r^n}$$

如果将这个切向量对应于R^n中

$$\left(\frac{d\sigma^1}{dt},\ \cdots,\ \frac{d\sigma^n}{dt}\right)$$

则我们有

$$\dot{\sigma}(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\sigma(t+h)-\sigma(t)}{h}$$

由此又可看出，在$M=R^n$的特殊情形中，切向量的概念与欧氏空间中切向量的几何概念是完全一致的。

§2.3 上切空间与拉回映射

考虑C^∞—流形M上的C^∞函数$f:M\to R$的微分。按照上一节的讨论，

$$df:T(M,\ x)\to T(R,\ f(x))$$

应满足

$$df(X)=X(f)\frac{d}{dr}$$

其中r是R中的坐标函数，$\frac{d}{dr}$是切空间$T(R,\ f(x))$的基向量。但是由于$T(R,\ f(x))$自然同构于R，其对应方式为

$$\lambda\frac{d}{dr}\mapsto\lambda$$

因此，我们可以通过这个同构，等同这两个空间。那么

$$df:T(M,\ x)\to R$$

是$T(M,\ x)$上的线性函数，即$df\in T^*(M,\ x)$——切空间$T(M,\ x)$的对偶空间，它可以表为

$$df(x)=Xf$$

其中$X\in T(M,\ x)$。

命$(U, x^1, \cdots, x^n)$是$x\in M$附近的坐标卡，切向量$X\in T(M, x)$可表示为

$$X=\sum_{i=1}^{n} X(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^{n} a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

那么

$$df(X)=X(f)=\sum_{i=1}^{n} a^i\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

坐标函数x^i的微分dx^i扮演着重要的角色，由于

$$dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial x^i}{\partial x^j}=\delta^i_j=\begin{cases}1 & \text{当 } i=j\\ 0 & \text{当 } i\neq j\end{cases}$$

所以$\{dx^i, i=1, \cdots, n\}$构成对偶空间$T^*(M, x)$中对偶于$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, i=1, \cdots, n\right\}$的基，称为$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, i=1, \cdots, n\right\}$的**对偶基**。

因为当$X=\sum_{i=1}^{n} a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$时，$dx^i(X)=a^i$，所以

$$df(X)=\sum_{i=1}^{n} a^i\frac{\partial f}{\partial x^i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i(X)$$

即

$$df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i$$

当$M=R^n$时，这就是多元函数的微分公式。

定义 $T(M, x)$的对偶空间$T^*(M, x)$称为流形M在x点的**上切空间**或**余切空间**，也记为$T^*_x(M)$或M^*_x。

上面的结果可以概括为：

命题 C^∞－流形M在x点的上切空间是$T^*(M, x)$，在局部坐标系$(U, x^1, \cdots, x^n)$中，是以$\{dx^i|_x, i=1, \cdots, n\}$为基底的向量空间。且$\dim T^*(M, x)=\dim T(M, x)=\dim M$。

任一$df_x \in T^*(M, x)$可表示为

$$df_x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}\bigg|_x dx^i\bigg|_x$$

我们已知C^∞映射$F: M \to N$诱导出在$x \in M$和$F(x) \in N$的切空间之间的映射$F_*: M_x \to N_{F(x)}$。同时，F还可以诱导出$x \in M$和$F(x) \in N$的上切空间的映射。

定义 C^∞映射$F: M \to N$在$x \in M$和$F(x) \in N$的上切空间诱导出的**上切映射**是切映射dF的对偶映射$\delta F: T^*(N, F(x)) \to T^*(M, x)$，满足对于$X \in T(M, x)$和$\omega \in T^*(N, F(x))$，有

$$\delta F(\omega)(X) = \omega(dF(X))$$

注意，这是由N的上切空间到M的上切空间的线性映射，所以也称为拉回映射，δF也记作F^*。

当$F: M \to N$，$x \in M$，$F(x) = y$，$f \in C^\infty(y)$。因为$df \in T^*(N, y)$，所以对于$X \in T(M, x)$

$$\delta F(df)(X) = df(dF(X)) = df \circ dF(X) = d(f \circ F)(X)$$

因此，我们得到

$$\delta F(df) = d(f \circ F)$$

拉回映射也有相应的链法则。当$F: M \to N$和$G: N \to P$都是C^∞映射时，

$$\delta(G \circ F)_x = (\delta F)_y \circ (\delta G)_z$$

其中$y = F(x)$，$z = G(y)$。

熟悉下面的图表是有益的：

$$M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} P$$

$$M_x \xrightarrow{dF} N_y \xrightarrow{dG} P_z$$

$$M_x^* \xleftarrow{\delta F} N_y^* \xleftarrow{\delta G} P_z^*$$

下面考虑上切映射在局部坐标系下的表示：

设 $a\in U\subset M$，以$(x^1, \cdots, x^m)$为局部坐标，$b\in V\subset N$，以$(y^1, \cdots, y^n)$为局部坐标，$F: M\to N$ 使$F(a)=b$，其局部坐标表示为

$$\begin{cases} y^1=y^1(x^1, \cdots, x^m) \\ \quad\cdots\cdots \\ y^n=y^n(x^1, \cdots, x^m) \end{cases}$$

我们已经知道切映射为

$$dF(X)=\sum_{j=1}^{n} X(y^j\cdot F)\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right)_b$$

其 Jacobian 矩阵为

$$(dF)=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1}, & \cdots, & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^m} \\ & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1}, & \cdots, & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix}$$

今设 $\omega=\sum_{i=1}^{n} v_i dy^i\in N_b^*$， $\delta F(\omega)=\sum_{j=1}^{m} u_j dx^j\in M_a^*$

则

$$\begin{aligned} \delta F(\omega) &= \delta F\left(\sum_{i=1}^{n} v_i dy^i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i[\delta F(dy^i)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} v_i[d(y^i\circ F)] \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} v_i\frac{\partial}{\partial x^j}(y^i\circ F)dx^j \end{aligned}$$

因此

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1}, & \cdots, & \frac{\partial y^n}{\partial x^1} \\ & \cdots\cdots & \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^m}, & \cdots, & \frac{\partial y^n}{\partial x^m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

其中变换矩阵记为(δF)，容易看出(dF)与(δF)互为转置矩阵。上面的结果还可以写成

$$\delta F(\omega) = \sum_{j=1}^{m} \omega\left[dF\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right] dx^j,$$

最后说明切映射F_*与上切映射F^*有如下的关系：若F_*是单一的，则F^*是在上的，反之，若F_*是在上的，则F^*是单一的。

§2.4 子 流 形

1. 子流形的概念及例子

设M和N分别为m维和n维C^∞－流形。$F:M\to N$是C^∞映射。一般地，m和n可以是任何非负整数。现在我们讨论$m\leqslant n$时的一些特殊的、重要的映射：

定义 1 $F:M\to N$是C^∞的。

（1）如果对于$\forall x\in M$，dF_x都是非退化的，即在x点的Jacobi矩阵的秩等于m，则称F是从M到N的浸入(immersion)，(F, M)是N的**浸入子流形**；

（2）如果F是从M到N的单一浸入，则称(F, M)是N的一个**子流形**；

（3）如果F是从M到N的单一的浸入，而且$F:M\to F(M)\subseteq N$是同胚映射，则称F是从M到N的**嵌入**(embedding)，(F, M)称为N的**嵌入子流形**。

图2.12简单而直观地说明了浸入，子流形和嵌入这三个概念的区别。

设 $\alpha_i: R\to R^2$（$i=1, 2, 3$）

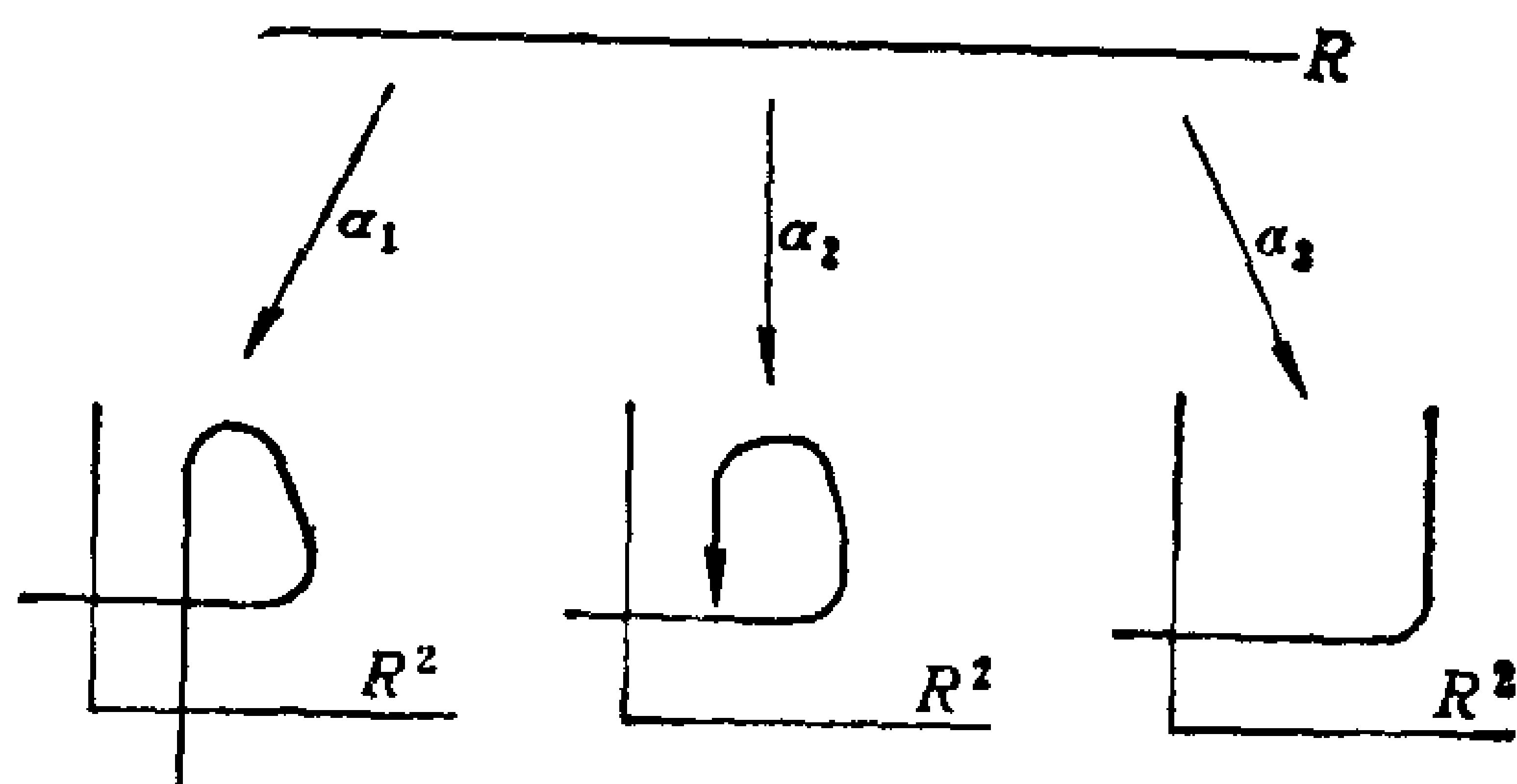


图 2.12

其中α_1是浸入而不是子流形，因为它不是单一的；(α_2, R)是R^2的子流形，因为它是单一浸入，但不是嵌入子流形，在$\alpha_2(R)$上带有R上原来的拓扑而与它在R^2中的子空间拓扑不一致；α_3是嵌入，在$\alpha_3(R)$上通过α_3带来的拓扑与作为R^2的子流形所得到的诱导拓扑是一致的。因此浸入与子流形的区别在于象集是否有自交点，而子流形与嵌入的区别在于上述两种拓扑是否一致。

下面再看几个例子：

例 1 $F: R\to R^2$，$F(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$，$F(R)$是$R^2$中的单位圆。容易看出，$F$是浸入。

例 2 $F: R\to R^3$，$F(t)=(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t, t)$。$F(R)$是$R^3$中的圆螺线。容易看出，$F$是嵌入。

例 3 $F: R\to R^2$，$F(t)=\left(2\cos\left(t-\frac{1}{2}\pi\right), \sin 2\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\right)$。$F(R)$为$R^2$中“8”字形(如图 2.13)。当$t$从0到$2\pi$时，像点从原点开始走完整个闭合回路，显然$F$是浸入。

例 4 在上例中，命$t=g(s)=\pi+2\mathrm{tg}^{-1}(s)$，则

$$G(s)=F(g(s))$$

$$=\left(2\cos\left(g(s)-\frac{\pi}{2}\right), \sin 2\left(g(s)-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

当 s 由 $-\infty\to+\infty$ 时，t 由 $0\to 2\pi$，所以其像集等于上例中 $F(0,2\pi)$ 部分。即 $G(R)$ 还是"8"字形，但它通过原点只一次。当 $s\to\pm\infty$ 时，其像趋近于原点，所以 $G(R)$ 构成 R^2 的子流形。注意，它不是嵌入(如图2.14)。

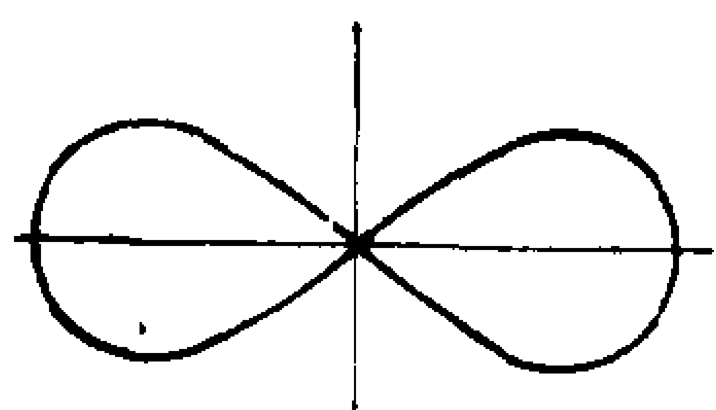


图 2.13

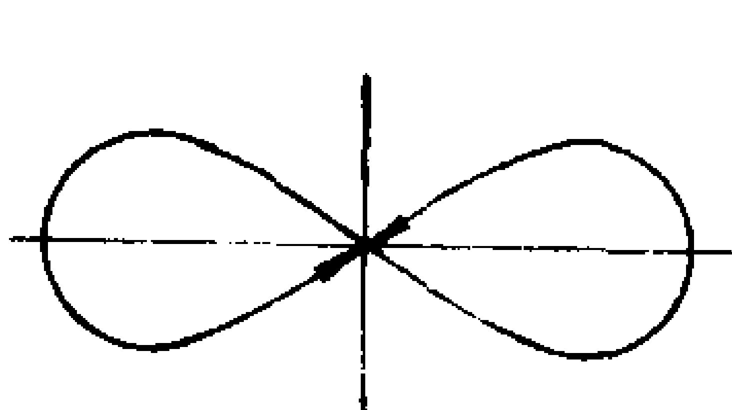


图 2.14

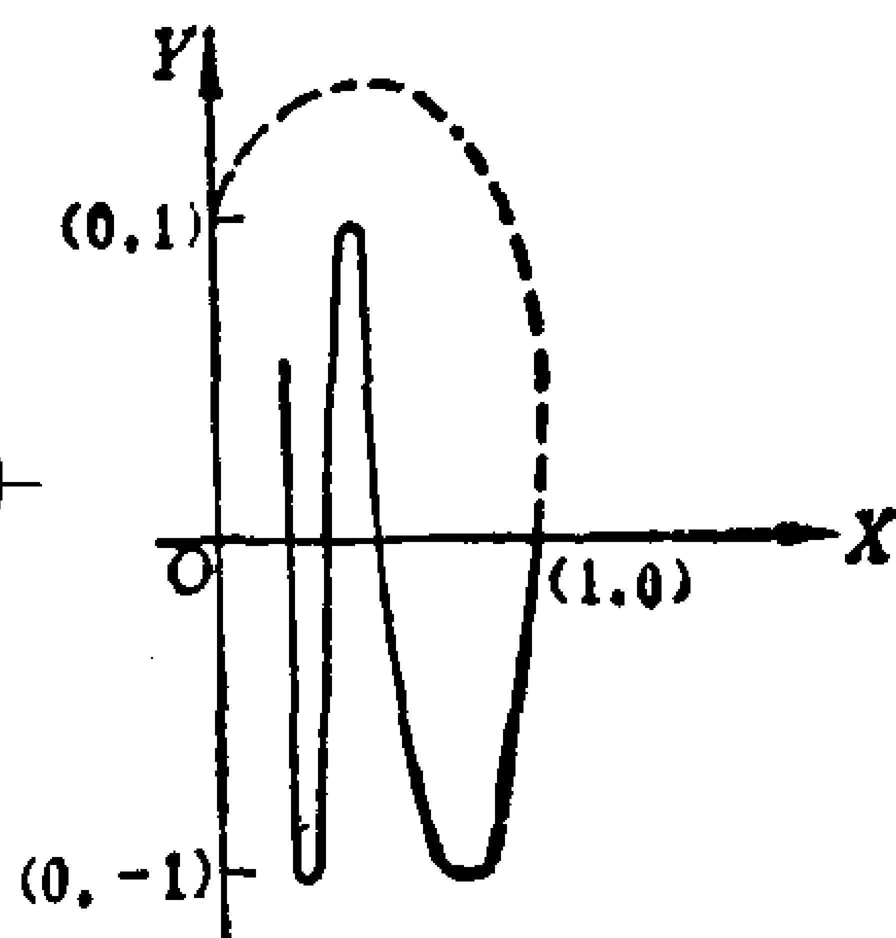


图 2.15

例 5 $F: R\to R^2$

$$F(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{t},\ \sin\pi t\right), & \text{当}\quad 1\leqslant t<\infty\\ (0,\ t+2), & \text{当}\quad -\infty<t\leqslant -1\end{cases}$$

而当 $-1\leqslant t\leqslant 1$ 时，我们用光滑曲线把 $(1,\ 0)$ 和 $(0,\ 1)$ 两点连接起来，这样就得到子流形 $(F,\ R)$，但不是嵌入。

我们已学过"微分同胚"的概念，它要求 C^∞ 映射 $F: M\to N$ 是单一的，在上的和 F^{-1} 也是 C^∞ 的。易知：

命题 如果 $F: M\to N$ 是微分同胚，则对于 $x\in M$，$dF_x: M_x\to N_{F(x)}$ 是同构。

由此可以看出，当 $F: M\to N$ 是微分同胚，则 $(F,\ M)$ 是 N 的嵌入子流形。

2. 反函数定理

在第一章中，我们已学过欧氏空间的反函数定理。现在把它推广到流形上，从而得到：

定理 1 设 $F: M\to N$ 是 C^∞－流形之间的 C^∞ 映射，$x\in M$，

如果 $dF_x: M_x \to N_{F(x)}$ 是同构，那么存在 x 的一个邻域 U，使得 $F|_U: U \to F(U) \subseteq N$ 是 U 到 N 的开集 $F(U)$ 上的微分同胚。

证明： 注意 $\dim M = \dim N = d$。选择 x 附近的局部坐标系

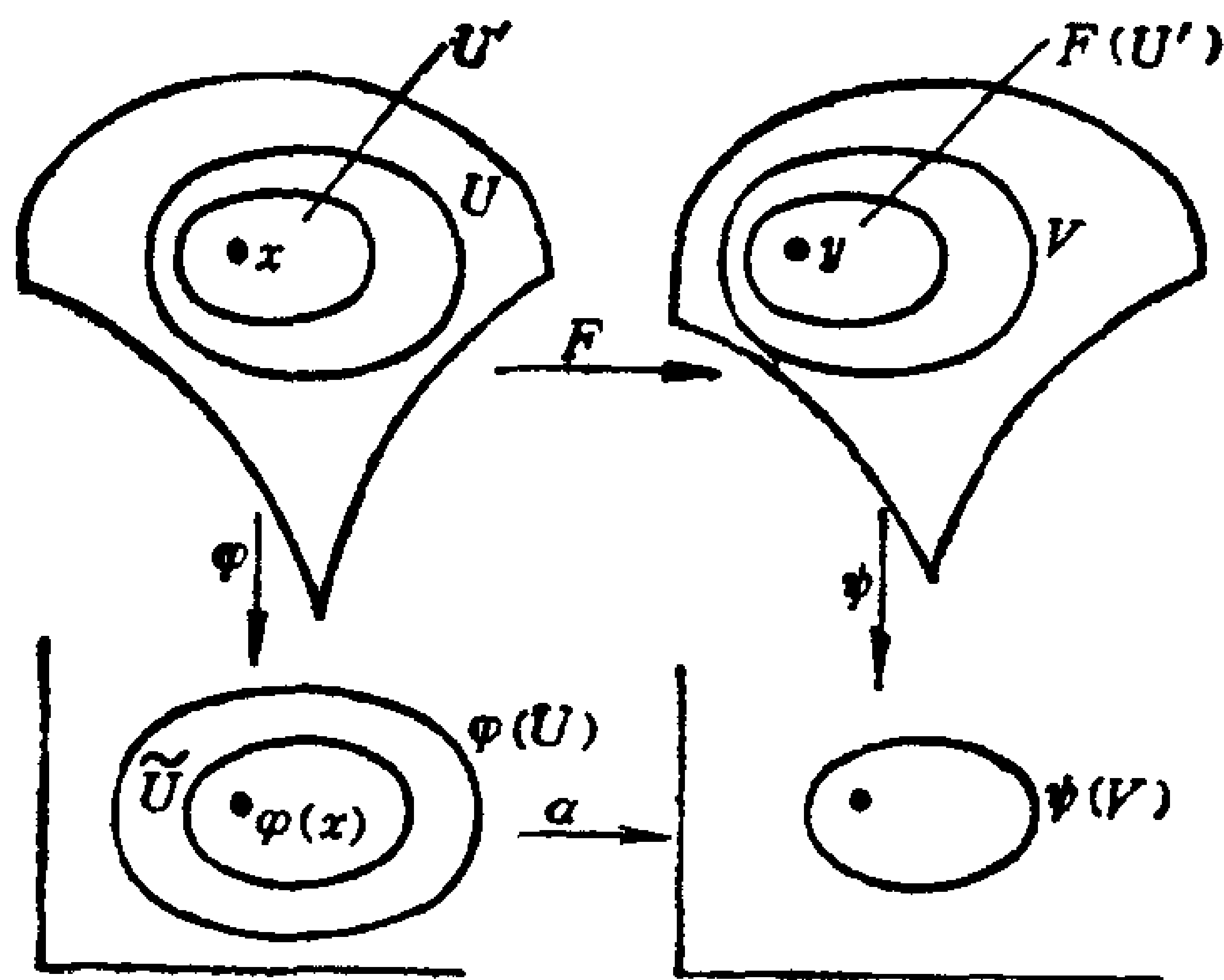


图 2.16

(U, φ) 和 $F(x)$ 附近的局部坐标系 (V, φ) 并使得 $F(U) \subseteq V$。命 $F(x) = y$，考虑欧氏空间 R^d 到 R^d 的映射

$$\alpha = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \varphi(U) \to \psi(U)$$

由于 α 在 $\varphi(x) \in \varphi(U)$ 是非退化的，根据欧氏空间的反函数定理，存在 $\varphi(x)$ 的一个邻域 $\widetilde{U} \subseteq \varphi(U)$，使得

$$\alpha = \psi \circ F \circ \varphi^{-1}: \widetilde{U} \to \alpha(\widetilde{U}) \subseteq \psi(V)$$

是微分同胚。因此

$$F = \psi^{-1} \circ \alpha \circ \varphi: U' \to F(U') \subseteq V$$

是微分同胚，其中 $U' = \varphi^{-1}(\widetilde{U})$。‖

定义 2 若 $F: M \to N$ 使 (F, M) 是 N 的子流形，而且对 $\forall x \in M$，存在以 $F(x) \in N$ 为中心的坐标邻域 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ 使 $F(M) \cap U$ 的局部坐标有 $x^{m+1} = \cdots = x^n = 0$，则称 (F, M) 是 N 的正则子流形，这时 F 也称为以 M 到 N 的正则嵌入。

定理 2 (F, M) 是 N 的子流形，则 F 是正则的当而仅当 F

是嵌入。

证明：当$F:M\to N$是正则的．对于$\forall P\in M$，取以P为心的局部坐标系$(U,\ x^1,\cdots,x^m)$，必存在$F(P)=Q\in N$为心的局部坐标系$(V,\ y^1,\cdots,y^n)$，使$F(U)\subseteq V$及$F(M)\cap V$中的坐标有$y^{m+1}=\cdots=y^n=0$．显然$F(U)\subseteq F(M)\cap V$．其坐标也有$y^{m+1}=\cdots=y^n=0$．因此，$F|_U$的局部坐标表示为

$$\begin{cases} y^i=y^i(x^1,\cdots,\ x^m),\ 1\leqslant i\leqslant m \\ y^j=0,\ \ m+1\leqslant j\leqslant n \end{cases}$$

注意到$(F,\ M)$是子流形，则在$P\in U$的 Jacobian 是非退化的，即矩阵的秩等于m。由此可知，行列式

$$\left.\frac{\partial(y^1,\ \cdots,\ y^m)}{\partial(x^1,\ \cdots,\ x^m)}\right|_P\neq 0$$

根据反函数定理，存在P的邻域$U'\subset U$，使$F|_{U'}:U'\to F(U')$是微分同胚，因此$F:M\to F(M)\subseteq N$是双方连续的，是同胚。即$F:M\to N$是嵌入。

反过来，当$F:\ M\to N$是嵌入，则对于$\forall P\in M$，及P的任一邻域U，存在$F(P)\in N$的一个邻域V，使$F(U)=F(M)\cap V$。同时对于$F(P)$的任一邻域V，存在P的邻域U，使$F(U)=F(M)\cap V$。因此，只要选择U，V充分小，可使U，V都在相应的局部坐标域内。这样$F|_U$的局部表示为

$$y^j=y^j(x^1,\ \cdots,\ x^m),\ \ j=1,\ \cdots,\ n$$

由于F在P点的Jacobian的秩为m。经过适当的坐标变换可使$F|_U$的局部表示化为

$$\begin{cases} y^i=y^i(x^1,\ \cdots,\ x^m),\ \ 1\leqslant i\leqslant m \\ y^j=0,\ \ m+1\leqslant j\leqslant n \end{cases}$$

而且$x^1(P)=\cdots=x^m(P)=0$，$y^i(0)=0$，$i=1,\ \cdots,\ m$。这就说明$F:M\to N$是正则的。‖

由反函数定理，还能直接看出

推论 若$F: M \to N$是浸入，则在每一点$P \in M$可找到P的邻域$U \subset M$，使$F|_U: U \to N$是嵌入。

定理 3 若(F, M)是N的子流形，M是紧致的，则$F: M \to N$一定是正则的。

证明：因为$F(M)$作为N的拓扑子空间是Hausdorff的，又$F: M \to F(M) \subset N$是紧致空间到Hausdorff空间的单一，到上，连续映射，所以$F: M \to F(M)$是同胚。这说明F是嵌入，即(F, M)是N的正则子流形。‖

H. Whitney等人证明了：每个n维微分流形都可嵌入到$2n+1$维欧氏空间中作为子流形。因此，研究高维欧氏空间的子流形是个非常重要而有意义的问题。

3．隐函数定理

在第一章中，我们已经学过欧氏空间中的隐函数定理，现在把它推广到流形上去。

定理 4 假设$\dim M > \dim N$，$F: M \to N$是C^∞映射，$y_0 \in F(M)$。命

$$P = F^{-1}(y_0) = \{x \in M | F(x) = y_0\}$$

如果对每一$x \in P$，$dF_x: M_x \to N_{F(x)}$是到上的(或称满的)，那么P有唯一确定的流形构造，它的空间拓扑是P在M中的相对拓扑，且包含映射$i: P \to M$是C^∞的。其次

$$\dim P = \dim M - \dim N$$

证明：设$\dim M = m$，$\dim N = n$。已知$m > n$。命V是y_0在N中的坐标邻域，坐标函数是$y^1, \cdots, y^n$。对于$\forall x_0 \in P$，命U是x_0在M中的坐标邻域，使得$U \subset F^{-1}(V)$且U中坐标函数是$x^1, \cdots, x^m$。还可假定$x^i(x_0) = 0\ (i = 1, \cdots, m)$，已知$dF$在$x_0$是满射，这意味着 Jacobian 矩阵

$$\left(\frac{\partial(y^i \circ F)}{\partial x^j}\right)_{x_0}$$

的秩是n，可以假定这个矩阵的后n列是独立的，即矩阵可以有

如下的形式

$$(*\ :\ J)$$

其中J是$n\times n$非异方阵。造一个映射

$$\bar{F}:\ U\to R^{m-n}\times V$$

为

$$\bar{F}(x)=(x^1(x),\ \cdots,\ x^{m-n}(x),\ F(x))。$$

那么$d\bar{F}_{x_0}$的矩阵为

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ * & J \end{pmatrix}$$

其中，I为$(m-n)\times(m-n)$单位矩阵。因此$d\bar{F}_{x_0}$是同构，根据反函数定理，存在x_0的一个邻域U_0，使得

$$\bar{F}:\ U_0\to\bar{F}(U_0)\subseteq R^{m-n}\times V$$

是微分同胚，我们可以假定$\bar{F}(U_0)$是形为$W_0\times V$的开集。其中$W_0\subseteq R^{m-n}$，$V_0\subseteq V$都是开集，且$0\in W_0$，$y_0\in V_0$，因为这类开集构成了$R^{m-n}\times V$上的拓扑基。注意

$$\bar{F}^{-1}(W_0\times\{y_0\})=P\cap U_0$$

因为$\bar{F}|_{U_0}$是同胚，所以$\bar{F}|_{P\cap U_0}$同胚地映射$P\cap U_0$到$W_0\times\{y_0\}\cong W_0\subseteq R^{m-n}$上。因此$\bar{F}|_{P\cap U_0}$是$P$中的一个局部坐标系

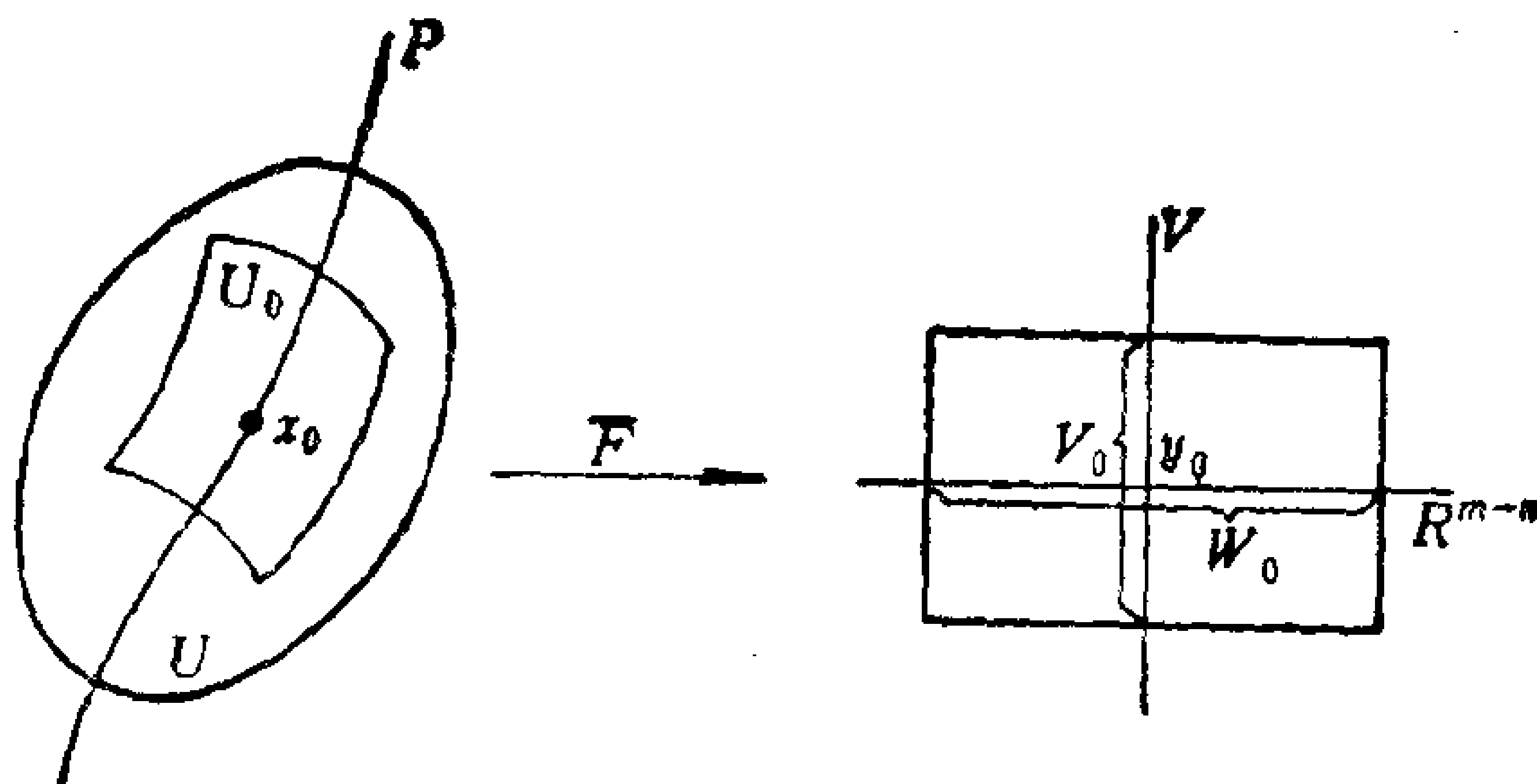


图 2.17

为了看出这样的坐标系在P中定义了一个光滑流形结构，设

$$\bar{F}: U_0 \to W_0 \times V_0$$
$$\bar{G}: U_1 \to W_1 \times V_1$$

且 $(P \cap U_0) \cup (P \cap U_1) \neq \phi$。因为 $\bar{F}^{-1}$ 是 C^∞的，所以

$$\bar{G} \circ \bar{F}^{-1}|_{\bar{F}(U_0 \cap U_1)}$$

也是 C^∞ 的。即限制到 $\bar{F}(P \cap U_0 \cap U_1) = \bar{F}(U_0 \cap U_1) \cap (R^{m-n} \times \{y_0\})$ 上得到

$$\bar{G} \circ \bar{F}^{-1}|_{\bar{F}(P \cap U_0 \cap U_1)}: \bar{F}(P \cap U_0 \cap U_1) \to \bar{G}(P \cap U_0 \cap U_1)$$

是 C^∞ 的，因此 P 是一光滑流形，维数是 $m-n$。||

隐函数定理是证明某些流形的子集是子流形的一个极为有用的工具。下面看几个例子。

例 1 n 维球面 S^n 是光滑流形，它的拓扑是在 R^{n+1} 中的相对拓扑。为了证明这一论断，命

$$F: R^{n+1} \to R$$

定义为

$$F(r_1, \cdots, r_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} r_i^2$$

那么 $S^n = F^{-1}(1)$；因为 $\dim R = 1$，我们只须证明在 $F^{-1}(1)$的每个点有 $dF \neq 0$。

因为 $dF = 2\sum_{i=1}^{n+1} r_i dr_i$，或记成

$$(dF) = (2r_1, \cdots, 2r_{n+1})$$

若 $(dF) = 0$，可得 $r_i = 0$，$i = 1, \cdots, n+1$。但该点不在 $F^{-1}(1)$ 上。由隐函数定理，S^n 是 R^{n+1} 的 n 维嵌入子流形。

例 2 环面 T^2 是 R^3 中的子流形。命

$$F: R^3 \to R$$

为

$$F(x^1, x^2, x^3) = \left[a - \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2}\right]^2 + (x^3)^2$$

它在 $F^{-1}(b^2)$，$a > b > 0$ 的每一点秩为 1。因此，$F^{-1}(b^2) - R^3$

中的环面 T^2 是 R^3 中的子流形。

例 3 命 $M=A(n)=\{n\times n$ 实矩阵$\}\cong R^{n^2}$，$N=R$

$$F=\det: A(n)\to R$$

则么模群 $Sl(n)=F^{-1}(1)=\{(r_{ij})\in A(n):\ \det(r_{ij})=1\}$ 是 $A(n)$ 的子流形。为此只须证明在 $F^{-1}(1)$ 中的每一点处 $dF\neq 0$ 即可。设 $(r_{ij})\in A(n)\cong R^{n^2}$。

$$F((r_{ij}))=\det(r_{ij})$$

$$=\sum_{\pi\in\sigma_n}(-1)^{\pi}r_{1\pi(1)}\cdots r_{n\pi(n)}$$

$$dF=\sum_{j=1}^{n}\sum_{\pi\in\sigma_n}(-1)^{\pi}r_{1\pi(1)}\cdots\hat{r}_{j\pi(j)}\cdots r_{n\pi(n)}dr_{j\pi(j)}$$

在这个和式中，每个 dr_{ij} 的系数是 r_{ij} 在矩阵 (r_{ij}) 中的余子式（可能差一正负号），对 $F^{-1}(1)$ 的任一点，这些系数不会全为零。因为 $\det(r_{ij})=1\neq 0$，因此 Jacobi 矩阵 $(dF)\neq 0$。另外，$\dim Sl(n)=n^2-1$。所以 $Sl(n)$ 是 $M=A(n)$ 中的 n^2-1 维子流形。

例 4 命 $M=A(n)$，$N=\{A\in A(n):\ A=A^t\}\cong R^{\frac{n(n+1)}{2}}$ 命

$$F: A(n)\to N$$

定义为

$$F(A)=AA^t$$

显然 F 是光滑的。因为 $F(A)$ 的元素是 A 的元素的多项式。命

$$O(n)=F^{-1}(I)=\{A\in A(n):\ AA^t=I\}$$

称为正交群。下面证明正交群 $O(n)$ 是 $A(n)$ 的子流形。为此只须证明：对于 $\forall A\in O(n)$，dF_A 是满的。

我们只须证明 $dF|_I$ 是满的，其中 $I=(\delta_{ij})$。理由如下：如果 $dF|_I$ 是满的，设 $A\in O(n)$，右平移 $R_A: M\to M$ 定义为 $R_A(B)=BA$（矩阵乘法），它是光滑的，且有光滑的逆 R_A^{-1}。因此 dR_A 是

同构（对任意的A）。其次，对于$\forall A\in O(n)$，$F\circ R_A=F$。这是因为对于$\forall B\in M$，

$$F\circ R_A(B)=F(BA)=(BA)(BA)'=BAA'B'=BB'=F(B)$$

因此，$dF|_A=d(F\circ R_A^{-1})|_A=dF|_{R(A)^{-1}}\circ dR_{A^{-1}}|_A=dF|_I\cdot dF_{A^{-1}}|_A$

所以，如果$dF|_I$是满的，则$dF|_A$也是满的。

下面证明$dF|_I$是满的。因为

$$(r_{ij}\circ F)(A)=\sum_{k=1}^{n}r_{ik}(A)\circ r_{jk}(A),\quad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$$

所以，$dF|_A$的矩阵元素是

$$\left.\frac{\partial(r_{ij}\circ F)}{\partial r_{kl}}\right|_A=\begin{cases}r_{jl}(A), & \text{当 } k=i\neq j\\ r_{il}(A), & \text{当 } k=j\neq i\\ 2r_{il}(A), & \text{当 } k=i=j\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

其中$1\leqslant k$，$l\leqslant n$，$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$。那么，$dF|_I$的矩阵元素是：

$$\frac{\partial(r_{ij}\circ F)|_I}{\partial r_{kl}}=\begin{cases}1, & \text{当 } (k,\ l)=(i,\ j),\ i\neq j\\ 1, & \text{当 } (k,\ l)=(j,\ i),\ i\neq j\\ 2, & \text{当 } (k,\ l)=(i,\ j),\ i=j\\ 0, & \text{其它情形}\end{cases}$$

其中$1\leqslant k$，$l\leqslant n$，$1\leqslant i\leqslant j\leqslant n$。

因此，由$k\leqslant l$的那些元素组成的子方阵是一对角矩阵，对角线上的元素是1或2，因此$dF|_I$的秩是$\frac{n(n+1)}{2}$，即$dF|_I$是满的，而且

$$\dim O(n)=\dim A(n)-\dim N=\frac{n(n-1)}{2}$$

例 5 命 $A(n,\ C)=\{n\times n\text{ 复矩阵}\}\simeq R^{2n^2}$。

$$N=\{A\in A(n,C);\ \bar{A}'=A\}$$

再命 $F: A(n,C) \to N$

定义为 $F(A) = A \cdot \overline{A}^t$

那么，如同例 4 的办法，可知：

$$U(n) = F^{-1}(I)$$

称为酉群（unitary group），是 $A(n, C)$ 的子流形．而且

$$\dim U(n) = 2n^2 - n^2 = n^2$$

注：例 3 、 4 、 5 是李群的重要例子．

§2.5 流形上的向量场

1．流形上的向量场

所谓 C^∞－流形 M 的切丛就是 $T(M) = \bigcup_{x \in M} T(M, x)$．$T(M, x)$ 表示M在 $x \in M$处的切空间．其上存在着自然投影

$$\pi: T(M) \to M$$

定义为：如果 $X \in M_x$，则 $\pi(X) = x$．显然对于每一个 $x \in M$，$\pi^{-1}(x) = T(M,x)$．设 (U, φ) 是M上 x 点附近的局部坐标系，以 $x^1, \cdots, x^n$ 为坐标．令

$$\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \to R^{2n}$$

使得：

$$\tilde{\varphi}(X_x) = (x^1(x), \cdots\cdots, x^n(x), b^1, \cdots, b^n).$$

其中

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_x .$$

所以，$\tilde{\varphi}$ 被 φ 完全确定．而且$\tilde{\varphi}$是 $\pi^{-1}(U)$到R^{2n}的一个开集的1－1映射．可以证明，利用 $\tilde{\varphi}$ 可使切丛 $T(M)$成为 $2n$ 维微分流形．

定义 1 C^∞－流形M上的向量场X是映射

$$X: M \to T(M)$$

使得：$\pi \cdot X = i_M$（M上的恒同映射）

如果X：$M\to T(M)$ 是C^∞的，则称X为M上的C^∞向量场。M上C^∞向量场的全体记成$C^\infty(M, T(M))$。

在$C^\infty(M,T(M))$中，定义向量场的加法和数乘：

$$(X_1+X_2)_P=(X_1)_P+(X_2)_P$$

$$(\lambda X)_P=\lambda X_P, \quad \lambda\in R$$

则$C^\infty(M,T(M))$构成实数域上的向量空间。如果上式中的λ是M上的C^∞函数。即$(\lambda X)_P=\lambda(P)\cdot X_P$，则$C^\infty(M,T(M))$构成$M$上的$C^\infty$的函数环上的模。

下面考虑向量场的局部坐标表示。

设$U\subset M$是任一坐标域，φ是坐标映射，我们知道U是M的开子流形，$T(U)$表示U的切丛，考虑映射：

$$\frac{\partial}{\partial x^i}: U\to T(U)$$

使$\frac{\partial}{\partial x^i}$：$P\in U\mapsto \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P$，显然$\frac{\partial}{\partial x^i}\in C^\infty(U,T(U))$。即$\frac{\partial}{\partial x^i}$是$U$上的光滑向量场。$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\ i=1,\cdots,n\right\}$称为$U$上的标架场。如果$X\in C^\infty(U, T(U))$，即$U$上的光滑向量场，则：

$\tilde{\varphi}\circ X\circ\varphi^{-1}$：$(x^1,\cdots\cdots,x^n)\mapsto(x^1,\cdots,x^n;a^1,\cdots,a^n)$是$C^\infty$

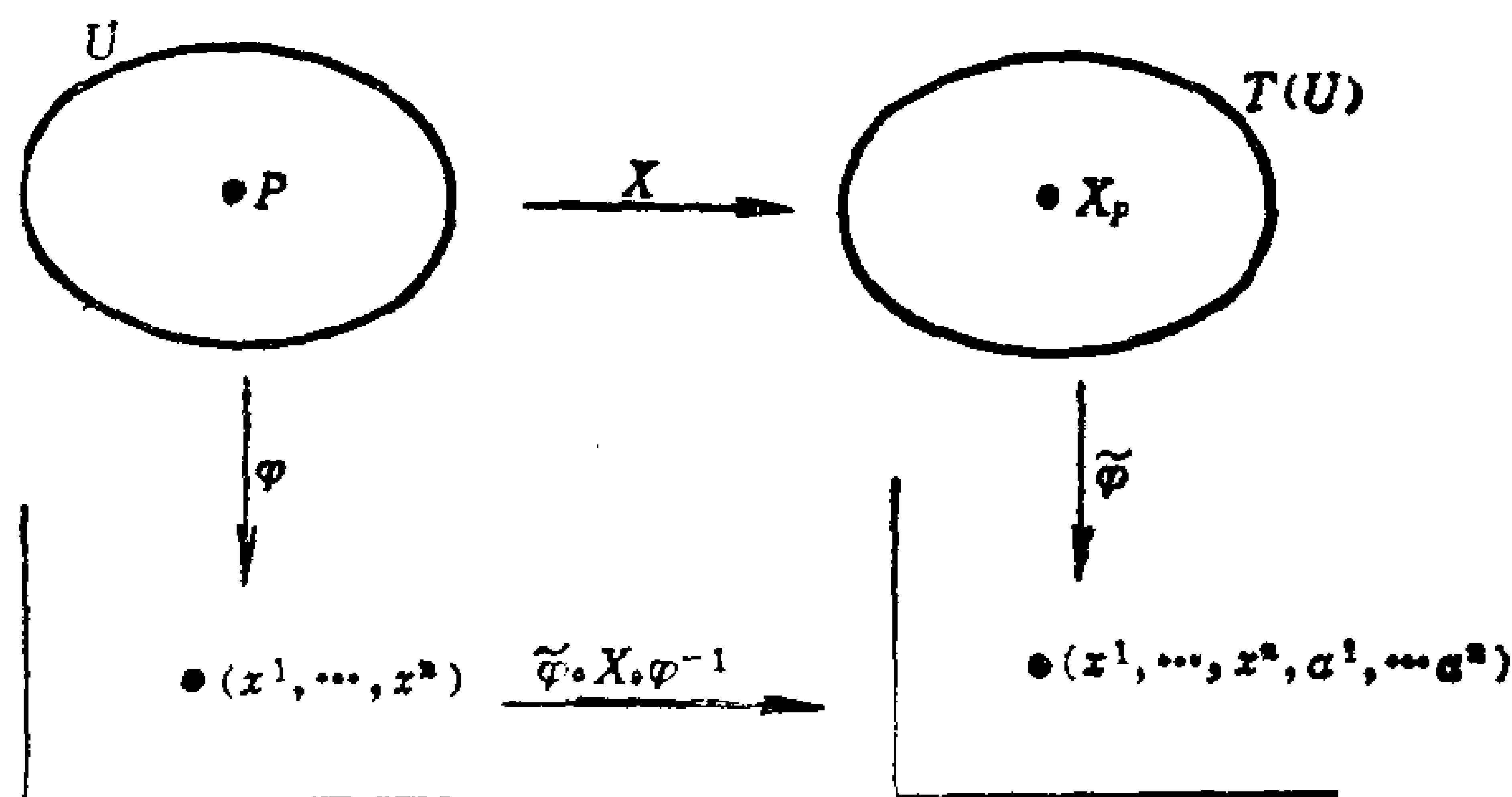


图 2.18

映射，其中 $X_P=\sum_{i=1}^{n} a^i(P)\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P$

所以，a^i，$i=1,2,\cdots,n$ 是U上的 C^∞ 函数，反之也对。这样，M上的任何光滑向量场，在局部坐标系（U，φ）之下，可以表示成

$$X=\sum_{i=1}^{n} a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

其中$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\right\}$是$U$上的标架场，也称为局部基，$a^i$是$U$上的光滑函数。

我们知道切向量 X_p：$C^\infty(P)\to R$ 作用在任一 $f\in C^\infty(P)$上，得

$$X_P(f)=\sum_{i=1}^{n} a^i(P)\frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_P$$

那么，可以定义

$$X:\ C^\infty(M)\to C^\infty(M)$$

为

$$(Xf)_P=X_Pf$$

其中 $f\in C^\infty(M)$ 表示M上的光滑函数，$P\in M$在局部坐标系$(U,x^1,\cdots,x^n)$ 之下有

$$Xf=\sum_{i=1}^{n} a^i(x)\frac{\partial f}{\partial x^i}$$

2．括号积

在M的全体 C^∞ 向量场中引进一种新的运算——括号积。

定义 2 若X，$Y\in C^\infty(M,T(M))$，我们定义$[X,Y]\in C^\infty(M,T(M))$，称为$X$和$Y$的括号积，使得

$$[X,Y]_Pf=X_P(Yf)-Y_P(Xf)$$

其中$P\in M$，$f\in C^\infty(M)$。

为了说明定义的合理性，必须证明$[X,Y]$确实是M上的 C^∞

向量场．为此只需证明两点：

（1）$Z_P=[X, Y]_P\in M_P$，即 $Z_P: C^\infty(P)\to R$ 满足导子的性质．

先看线性条件．设 $f, g\in C^\infty(P)$，$\alpha, \beta\in R$．

$$
\begin{aligned}
&[X, Y]_P(\alpha f+\beta g)\\
&=X_P(Y(\alpha f+\beta g))-Y_P(X(\alpha f+\beta g))\\
&=X_P(\alpha Yf+\beta Yg)-Y_P(\alpha Xf+\beta Xg)\\
&=\alpha X_P(Yf)+\beta X_P(Yg)-\alpha Y_P(Xf)-\beta Y_P(Xg)\\
&=\alpha[X,Y]_Pf+\beta[X,Y]_Pg
\end{aligned}
$$

再看 Leibniz 条件

$$
\begin{aligned}
&[X,Y]_P(f\cdot g)=X_P(Y(f\cdot g))-Y_P(X(f\cdot g))\\
&=X_P(fYg+gYf)-Y_P(fXg+gXf)\\
&=(X_Pf)(Yg)_P+f(P)X_P(Yg)+(X_Pg)(Yf)_P\\
&\quad+g(P)X_P(Yf)-(Y_P(f))(Xg)_P-f(P)Y_P(Xg)\\
&\quad-(Y_Pg)(Xf)_P-g(P)Y_P(Xf)\\
&=f(P)[X,Y]_Pg+g(P)[X, Y]_Pf
\end{aligned}
$$

（2）在M上$[X, Y]$是C^∞的，因为对于C^∞的函数f，$[X, Y]f=X(Yf)-Y(Xf)$是C^∞函数．

命题 1 括号积有以下性质：

（1）双线性：

$$
\begin{aligned}
&[\alpha X_1+\beta X_2, Y]=\alpha[X_1, Y]+\beta[X_2, Y]\\
&[X, \alpha Y_1+\beta Y_2]\\
&=\alpha[X, Y_1]+\beta[X, Y_2]\qquad \alpha, \beta\in R
\end{aligned}
$$

（2）反称性：

$$[X, Y]=-[Y, X]$$

（3）Jacobi 恒等式

$$[[X, Y], Z]+[[Y, Z], X]+[[Z, X], Y]=0$$

（4）若 $f, g\in C^\infty(M)$，则

$$[fX, gY]=fg[X, Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X$$

证明请读者完成。由性质（1），（2），（3）可知，在$C^\infty(M, T(M))$上定义了括号积后，它是一个李代数，称为向量场的李代数。

下面要证明映射的微分是保持括号积的。

我们注意到，一个C^∞映射$F: M \to N$的切映射：

$$dF: T(M) \to T(N)$$

不一定能把向量场映成向量场。

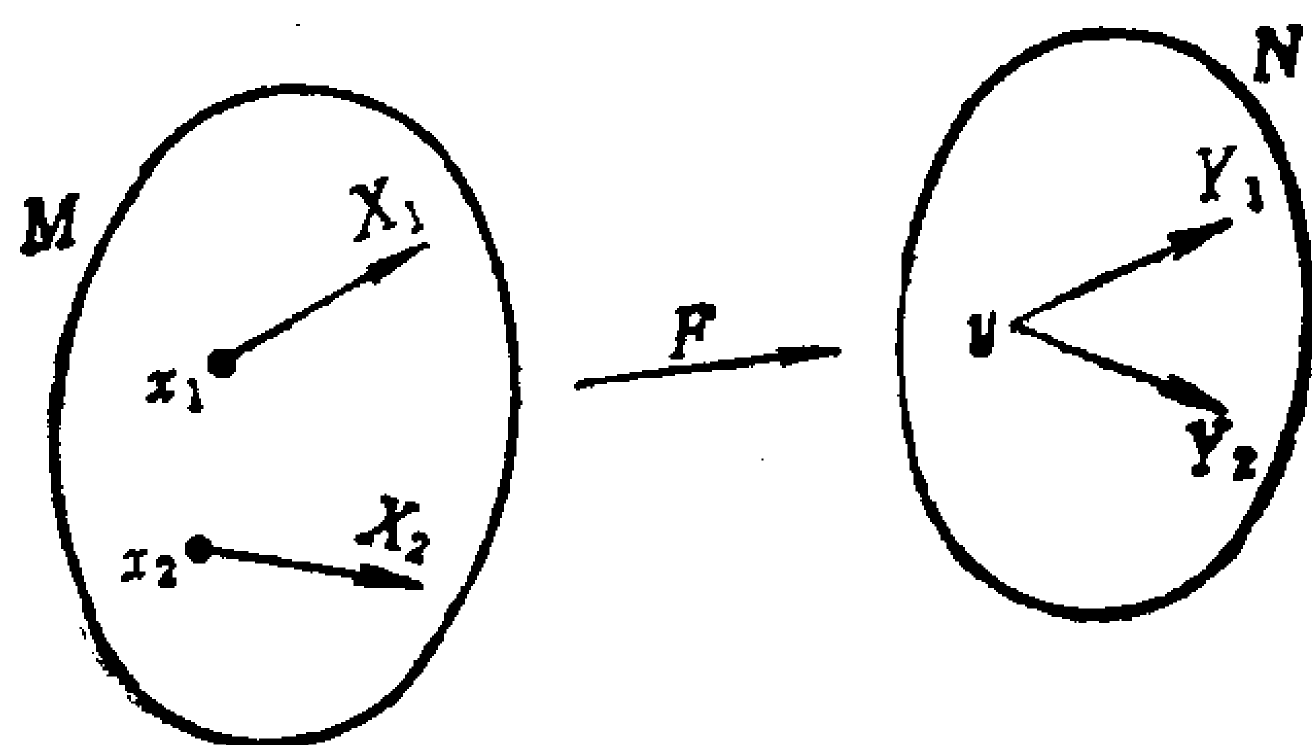


图 2.19

例如，当$F(x_1)=F(x_2)=y$时，$dF(X_1)=Y_1$，$dF(X_2)=Y_2$，当X是M上的C^∞向量场时，在N上一点y处却有两个向量，不能构成向量场。

定义3 $F: M \to N$是C^∞的，$X \in C^\infty(M, T(M))$，$Y \in C^\infty(N, T(N))$，使得对于$\forall Q \in N$和$P \in F^{-1}(Q) \in M$，满足

$$dF(X_P) = Y_Q$$

则称向量场X和Y是F－相关的，记为$Y = F_*(X)$。

若$F: M \to M$是微分同胚，$X \in C^\infty(M, T(M))$。使得$F_*(X) = X$，则称X是F不变的。

例如，R^2中向量场$\frac{\partial}{\partial x}$和$\frac{\partial}{\partial y}$，在平移下是不变的。

当X和Y是F－相关的，对于$\forall P \in M$，

$$dF(X_P) = Y_{F(P)}$$

设$g \in C^\infty(N)$是N上任一C^∞函数，则

$$dF(X_P)(g)=Y_{F(P)}(g)$$

上式左边

$$dF(X_P)(g)=X_P(g\circ F)$$
$$=X(g\circ F)|_P=X(g\circ F)(P)$$

上式右边

$$Y_{F(P)}(g)=(Yg)|_{F(P)}=(Yg)\circ F(P)$$

因此

$$X(g\circ F)=(Yg)\circ F$$

这是向量场X和Y，F－相关的等价定义，下面要用到。

命题 2 设F：$M\to N$是C^∞的，X_1，X_2和Y_1，Y_2分别是M上和N上的C^∞向量场，且X_1与Y_1，X_2和Y_2分别是F－相关的，则$[X_1, X_2]$与$[Y_1, Y_2]$是F－相关的，即

$$dF[X_1, X_2]=[dF(X_1), dF(X_2)]$$

换言之，映射F的微分dF是保持括号运称的。

证明：对于$\forall P\in M$，$g\in C^\infty(N)$，必须证明

$$dF([X_1, X_2]_P)(g)=[Y_1, Y_2]_{F(P)}(g)$$

左边$=[X_1, X_2]_P(g\circ F)$

$$=X_{1P}(X_2(g\circ F))-X_{2P}(X_1(g\circ F))$$
$$=X_{1P}((Y_2g)\circ F)-X_{2P}((Y_1g)\circ F)$$
$$=dF(X_{1P})(Y_2g)-dF(X_{2P})(Y_1g)$$
$$=Y_{1F(P)}(Y_2g)-Y_{2F(P)}(Y_1g)$$
$$=[Y_1, Y_2]_{F(P)}(g)=\text{右边}\quad \|$$

命题 3 在M的局部坐标系（U，φ）下，$\frac{\partial}{\partial x^i}$是标架场，则

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]=0$$

证明：对$\forall P\in U$，$f\in C^\infty(P)$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]f=\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_P\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)-\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_P\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\bigg|_P-\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}\bigg|_P=0 \quad \|$$

§2.6 向量场的积分曲线和Frobenius定理

1. 向量场的积分曲线

定义 4 命X是M上的光滑向量场，M中一条光滑曲线$\sigma(t)$称为X的一条积分曲线，如果：

$$\dot{\sigma}(t)=X_{\sigma(t)},$$

对于σ的定义域中每个t成立。

定理 1 命X是C^∞－流形M上的C^∞向量场，那么对$\forall P\in M$，存在P的邻域V和实数$\delta>0$，使得存在一个C^∞映射：

$$\theta: I_\delta=(-\delta,\ \delta)\times V\to M$$

满足：

(1) $\dot{\theta}(t,\ q)=X_{\theta(t,\ q)},\quad q\in V$

(2) $\theta(0,\ q)=q$.

而且这样的映射是唯一的。

证明：对于$\forall P\in M$，选M的局部坐标系$(U,\ \varphi)$，$P\in U$，以$x^1,\ \cdots,\ x^n$为坐标函数。则$d\varphi(X)=\widetilde{X}$，是$\widetilde{U}=\varphi(U)\subseteq R^n$上的与$X$是$\varphi$－相关的$C^\infty$向量场。应用欧氏空间常微分方程组的存在唯一定理，可得到

$$\tilde{\theta}: I_\delta\times\widetilde{V}\to\widetilde{U}$$

其中$I_\delta=(-\delta,\ \delta)$，$\widetilde{V}$是$\varphi(P)$的邻域且$\widetilde{V}\subset\widetilde{U}$，使得：

$$\tilde{\theta}(t,\ a)=(x^1(t,\ a),\ \cdots\cdots,\ x^n(t,\ a)),\quad a\in\widetilde{V}$$

$$\dot{\tilde{\theta}}(t,\ a)=\widetilde{X}_{\tilde{\theta}(t,a)}$$

$$\tilde{\theta}(0,\ a)=a$$

而且这样的映射唯一。

现在命$V=\varphi^{-1}(\widetilde{V})$，它是$U$中$P$的邻域，定义

$$\theta: I_\delta\times V\to U$$

为$\theta(t,\ q)=\varphi^{-1}(\tilde{\theta}(t,\ \varphi(q)))$。由于$\varphi$是微分同胚，容易

看出θ满足定理中的（1）、（2），而且是唯一的。‖

定义5 C^∞一流形M上的C^∞向量场X，过$P\in M$的积分曲线$\sigma(t)$使$\sigma(0)=P$，设t的范围是$I_P=(a(P),\ b(P))$。对每个$t\in R$，命

$$\mathscr{D}_t=\{P\in M:\ t\in(a(P),\ b(P))\}$$

定义变换

$$X_t:\ \mathscr{D}_t\to M$$

为

$$X_t(P)=\sigma_P(t)$$

其中$\sigma_P(t)$是向量场X过P点的积分曲线。

直观地说，在每个点P处存在X的唯一的积分曲线，而映射X_t就是把P点映到该积分曲线上参数为t的点。这一映射只对$\mathscr{D}_t$上的点才有意义。对$\mathscr{D}_t$外的点，其积分曲线上没有参数为t的点，即曲线不够长。

定理2 变换X_t有如下性质。

（1）$X_s\circ X_t$的定义域$\subset\mathscr{D}_{s+t}$上时。

$$X_s\circ X_t=X_{s+t};$$

（2）对每个t，$\mathscr{D}_t$是开的；

（3）$X_t:\ \mathscr{D}_t\to\mathscr{D}_{-t}$是微分同胚，以$X_{-t}$为逆。

证明：（1）对于$\forall P\in\mathscr{D}_{t+s}$

$$X_t(P)=\sigma_P(t)$$

$$X_s\circ X_t(P)=X_s(X_t(P))=\sigma_{\sigma_P(t)}(s)$$

$$X_{s+t}(P)=\sigma_P(s+t)$$

根据积分曲线的唯一性

$$\sigma_{\sigma_P(t)}(s)=\sigma_P(s+t)$$

因此

$$X_s\circ X_t=X_{s+t}$$

（2）当$t=0$时是显然的。只证$t>0$的情形，设$P\in\mathscr{D}_t$。根据定理1，对于$\sigma_P([0,\ t])$中每一点有$I_\delta\times V\to M$，使过V

中的所有点有唯一积分曲线，且正向长为 δ。再由 $\sigma_P([0, t])$ 的紧致性，可找到 $\sigma_P([0, t])$ 的邻域W和公共的 $\varepsilon>0$，使 W中每点处的积分曲线正向长不小于 ε。

选足够大的正整数 n，使 $\frac{t}{n}\in(-\varepsilon, \varepsilon)$。命：$\alpha_1=X_{\frac{t}{n}}\Big|_W$，且命 $W_1=\alpha_1^{-1}(W)\cap W$，由于$W$和 $\alpha_1^{-1}(W)$ 是开的，可知 W_1 是开的且 $W_1\subset W$，然后，我们归纳地定义

$$\alpha_i=X_{\frac{t}{n}}\Big|_{W_{i-1}}，W_i=\alpha_i^{-1}(W_{i-1})\cap W$$

则 $W_n\subset W$是开子集，且 $P\in W_n$。

对于 $\forall\, q\in W_n$。

$$\alpha_n(q)\in W_{n-1}，\cdots，\alpha_1\circ\alpha_2\circ\cdots\circ\alpha_n(q)\in W$$

而

$$\alpha_1\circ\alpha_2\circ\cdots\cdots\circ\alpha_n=(X_{\frac{t}{n}})^n=X_t，\therefore q\in\mathscr{D}_t$$

因此得到，$W_n\subset\mathscr{D}_t$，即$\mathscr{D}_t$是开的。

（3）X_t是$\mathscr{D}_t\longrightarrow\mathscr{D}_{-t}$上的单一，到上的映射，并以 X_{-t}为逆映射。再由 $X_t=\alpha_1\circ\cdots\circ\alpha_n$ 可知是 C^∞ 映射。容易看出

$$X_t：\mathscr{D}_t\longrightarrow\mathscr{D}_{-t}\text{是微分同胚。}\|$$

定义 6　M上光滑向量场X称为完备的，如果对于所有的 $t\in R$，$\mathscr{D}_t=M$。换言之，对每一 $P\in M$，积分曲线 σ_P 的定义域是（$-\infty$，$+\infty$）。这时 X_t 构成M的变换群，称为由X确定的单参群。如果X不完备，变换 X_t 不构成群，但在局部仍有群的某些性质，称为由X确定的局部单参群。

例：$R^2-\{0\}$上的向量场 $\frac{\partial}{\partial r^1}$ 是非完备向量场。如果 $a>0$，那么通过（a，0）的极大积分曲线的定义域是$(-a, \infty)$。

如果流形M是紧致的，则在M上的任意 C^∞ 向量场都是完备的（参看 Boothby 的书 P140）。

定理 3　$P\in M$，X是M上 C^∞ 向量场，并且$X(P)\neq 0$，则在P的一个邻域上，存在一坐标系（U，φ），以 x^1，$\cdots$，x^n 为

坐标函数，使得

$$X|_U=\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_U$$

证明：选一个以P为中心的局部坐标系（V，τ），坐标函数记为y^1，…，y^n，使得

$$X_P=\frac{\partial}{\partial y^1}\bigg|_P$$

根据定理1，存在P点的邻域W和$\varepsilon>0$，使过W中每一点有唯一的积分曲线$\sigma(t)$，且$|t|<\varepsilon$，在P点则有

$$\dot{\sigma}_P(0)=X_P$$

考虑R^{n-1}中的点（a^2，…，a^n），使（0，a^2，…，a^n）$\in\tau(W)$，并且记$\sigma(t, a^2, \cdots, a^n)=X_t(\tau^{-1}(0, a^2, \cdots, a^n))$，$|t|<\varepsilon$。映射

$$\sigma:\ (-\varepsilon,\ \varepsilon)\times(W_1\subset R^{n-1})\longrightarrow M$$

是C^∞的，并且在原点有：

$$d\sigma\left(\frac{d}{dr^1}\right)_0=X_P=\frac{\partial}{\partial y^1}\bigg|_P$$

$$d\sigma\left(\frac{d}{dr^i}\right)_0=\frac{\partial}{\partial y^i}\bigg|_P\qquad(i\geqslant 2)$$

即σ在原点处是非退化的。由反函数定理σ是局部微分同胚。命$\varphi=\sigma^{-1}$，可构成P点的某邻域上的坐标映射。用x^1，…，x^n来表示该坐标系（U，φ）的坐标函数。则因为

$$d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\bigg|_{(t,a^2,\cdots,a^n)}\right)=X_{\sigma(t,a^2,\cdots,a^n)}$$

所以

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\bigg|_U=d\varphi^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\bigg|_{\varphi(U)}\right)$$

$$=d\sigma\left(\frac{\partial}{\partial r^1}\bigg|_{\sigma^{-1}(U)}\right)=X|_U\ \|$$

2. Frobenius定理

定义7 （1）在d维流形M上的一个c维分布（distribu-

tion)$\varDelta$，是对每个点$P\in M$，指定$T_P(M)$的一个c维子空间$\varDelta_P$，其中c为整数，$1\leqslant c\leqslant d$。如果对每个$P\in M$。存在P的邻域U和c个线性无关的C^∞向量场X_1，…，X_c，它们构成$\varDelta$的一组基，则称$\varDelta$是M上的一个C^∞分布，而X_1，…，X_c称为$\varDelta$的局部基。

（2）M上的一个C^∞分布$\varDelta$称为对合的（involution）或完全可积的，如果当向量场X和$Y\in\varDelta$，则有：

$$[X, Y]\in\varDelta$$

这等价于，如果在每点的一邻域中存在局部基$X_1,\cdots,X_c$使得：

$$[X_i, X_j]=\sum_{k=1}^{c} C_{ij}^k X_k, \quad 1\leqslant i, \ j\leqslant c$$

其中C_{ij}^k是C^∞函数。

（3）M的子流形（ψ，N），如果对于$\forall P\in N$，

$$d\psi(N_P)=\varDelta_{\psi(P)}$$

则称N是分布$\varDelta$的积分流形。

例1　M的一维分布就是一个以向量场X为基的"直线场"，它总是对合的，因为$[X, X]=0$。同时我们已经知道，一维分布总是可积的。

例2　R^3上的分布$\varDelta$，有局部基

$$X_1=x^3\frac{\partial}{\partial x^1}+\frac{\partial}{\partial x^3}$$

$$X_2=\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x^3}$$

$\varDelta$不是对合的，因为$[X_1, X_2]=-\frac{\partial}{\partial x^1}$，它不是$X_1, X_2$的组合。

命题　$\varDelta$是M上的一个C^∞分布，如果通过M的每一点存在$\varDelta$的一个积分流形，那么$\varDelta$是对合的。

证明：对于$\forall P\in M$。设通过P的$\varDelta$的积分流形是（ψ，

N)。则有

$$d\psi(N_P)=\Delta_P$$

设X，Y是Δ中的C^∞向量场，则X_P、$Y_P\in\Delta_P$。我们还可把X，Y看成积分流形N上的C^∞向量场。那么，在N上

$$[X,\ Y]_P\in N_P=\Delta_P \qquad \|$$

Frobenius定理 若Δ是M^d上的c维对合C^∞分布，$P\in M$。则存在Δ的通过P的一个积分流形，更确切地说，存在以P为中心的立方坐标系（U，φ），以x^1，…，x^d为坐标函数，使得

$$N=\{x\in U:\ \varphi(x)=(x^1,\ \cdots,\ x^c,\ x^{c+1},\ \cdots,\ x^d).$$
$$x^i=\text{常数}\quad i=c+1,\ \cdots,\ d\}$$

是Δ的通过P点的积分流形。

证明：用归纳法来证明存在性。当$c=1$时，选择位于Δ之中，定义在P的某邻域上的非零向量场X，根据定理3，存在局部坐标系（U，φ），使得

$$X|_U=\frac{\partial}{\partial x^1}$$

因此，定理对$c=1$成立。

假定定理对$c-1$维分布成立。下面证明对c维分布Δ，定理也成立。因为Δ是光滑的，在P的一个邻域$\widetilde{V}$上存在Δ的光滑的局部基X_1，…，X_c。还根据定理3，存在以P为中心的坐标系（V，y^1，…，y^d），使$V\subset\widetilde{V}$，而且

$$X_1|_V=\frac{\partial}{\partial y^1} \tag{1}$$

在Δ上定义一组新基

$$\begin{cases} Y_1=X_1 \\ Y_i=X_i-X_i(y^1)X_1 \quad (i=2,\ 3,\ \cdots,\ c) \end{cases} \tag{2}$$

其中$X_i(y^1)$是X_i在$\frac{\partial}{\partial y^1}=X_1$上的分量，命

$$S=\{x\in V:\ 坐标\ y^1=0\}$$

再命 $$Z_i=Y_i|_S,\quad i=2,\cdots,c \tag{3}$$

根据(1),(2) $$Y_i(y^1)=0,\quad i=2,\cdots,c \tag{4}$$

所以Z_i实际上是S上的向量场，即当$q\in S$时

$$Z_i(q)\in S_q$$

$\{Z_i,\ i=2,\cdots,c\}$在S上张成C^∞的($c-1$)维分布。

下面证明这个分布是对合的，用i表示S在M中的包含映射，则Z_i是i一相关于Y_i的。自然它们的括号积也是i一相关的，但

$$[Y_i,\ Y_j](y^1)=0,\quad i,\ j\geqslant 2$$

即$[Y_i,\ Y_j]$($i,\ j\geqslant 2$)在Y_1方向上没有分量，因此存在C^∞函数C_{ij}^k，使得在V上

$$[Y_i,\ Y_j]=\sum_{k=2}^{c}C_{ij}^kY_k \tag{5}$$

而且由此得到

$$[Z_i,\ Z_j]=\sum_{k=2}^{c}C_{ij}^k|_SZ_k \tag{6}$$

这表明在S上的分布是对合的。根据归纳假定，在S上存在以P为心的立方坐标系，坐标函数为$w^2,\cdots,w^d$，使得上述分布有积分流形：

$$\{X\in S:\ w^{c+1},\cdots,w^d\ 均为常数\}$$

命π: $V\to S$是在y坐标系中的自然投影。现将S上的坐标系($w^2,\cdots,w^d$)扩充成V中P的某邻域中的坐标系，扩充法如下：

$$\begin{cases} x^1=y^1 \\ x^j=w^j\circ\pi \quad (j=2,\cdots,d) \end{cases} \tag{7}$$

从而得到P的一个新的坐标邻域U，以$x^1,\cdots,x^d$为坐标函数。如果我们能证明在U上

$$Y_i(x^{c+r})=0,\ (i=1,\ \cdots,\ c;\ r=1,\ 2,\ \cdots,\ d-c) \tag{8}$$

即Y_i在$\frac{\partial}{\partial x^{c+1}}$，…，$\frac{\partial}{\partial x^d}$上的分量为0．那么，$Y_i$是标架$\frac{\partial}{\partial x^1}$，…，$\frac{\partial}{\partial x^c}$的线性组合，因此$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x^c}\right\}$构成$\varDelta$的局部基。这样定理中的$N$就是$\varDelta$的积分流形。

下面证明（8）式。

（7）式蕴含着，在U上

$$\frac{\partial x^j}{\partial y^1}=\begin{cases}1 & (j=1)\\ 0 & (j=2,\ 3,\ \cdots,\ d)\end{cases} \tag{9}$$

根据（1），（2），（9）可知，在U上

$$Y_1=\frac{\partial}{\partial x^1} \tag{10}$$

因此对于$i=1$，（8）式成立，下面令$i=2$，…，c，$r=1$，…，$d-c$。根据（10）

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^1}(Y_i(x^{c+r}))\\ &=Y_1(Y_i(x^{c+r}))=[Y_1,\ Y_i](x^{c+r})\end{aligned} \tag{11}$$

由$\varDelta$的对合性，存在C^∞函数组C_{ik}，使得

$$[Y_1,\ Y_i]=\sum_{k=1}^{c}C_{ik}Y_k \tag{12}$$

由（11），（12）得

$$\frac{\partial}{\partial x^1}(Y_i(x^{c+r}))=\sum_{k=2}^{c}C_{ik}Y_k(x^{c+r}) \tag{13}$$

在x^1一曲线上，即在x^2=常数，…，x^d=常数时，$Y_i(x^{c+r})$只是x^1的函数，这时（13）式变成关于x^1的$c-1$次齐次线性微分方程组，其初始条件是当$x^1=0$时，即在$S\cap U$上

$$Y_i(x^{c+r}) = Z_i(w^{c+r}) = 0 \ (i = 2, \cdots, c) \tag{14}$$

其中第一个等号来自（3）和（7）。第二个等号来自归纳假设。因为方程组是齐次的，所以0函数给出了一组解。这也满足初始条件，再根据解的唯一性，方程组（13）满足初始条件（14）的解为零解。即

$$Y_i(x^{c+r}) = 0, \ (i = 1, \cdots, c; \ r = 1, \cdots, d-c)$$

这就证明了（8）式。‖

§2.7 上切丛和微分1-形式

所谓C^∞-流形M的上切丛就是$T^*M = \bigcup\limits_{x \in M} T^*(M, x)$，其中$T^*(M, x)$表示$M$在$x$点的上切空间，即切空间$T(M, x)$的对偶空间，存在着自然投影

$$\pi: T^*(M) \to M$$

定义为：如果$\omega \in M_x^* = T^*(M, x)$，则$\pi(\omega) = x$。显然对于每一个$x \in M$，$\pi^{-1}(x) = M_x^*$。设$(U, \varphi)$是$M$上$x$点附近的局部坐标系。以$x^1, \cdots, x^n$为坐标。令$\tilde{\varphi}: \pi^{-1}(U) \longrightarrow R^{2n}$使得

$$\tilde{\varphi}(\omega_x) = (x^1(x), \cdots, x^n(x), a_1, \cdots, a_n)$$

其中：$\omega_x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i dx^i|_x$

所以，$\tilde{\varphi}$被φ完全确定。而且$\tilde{\varphi}$是$\pi^{-1}(U)$到R^{2n}中一个开集的一一映射。可以证明，利用$\tilde{\varphi}$可使上切丛$T^*(M)$成为$2n$维微分流形。M的上切丛也称为余切丛。我们还说$T(M)$和$T^*(M)$是相互对偶的。

定义 C^∞流形M上的微分1-形式ω是映射

$$\omega: M \to T^*(M)$$

使得 $\pi \circ \omega = i_M$（M上的恒同映射）

如果$\omega: M \to T^*(M)$是C^∞映射，则称ω为M上的C^∞微分1-形式

或光滑微分1－形式，简称1－形式。

M上的全体1－形式记成$C^\infty(M, T^*M)$。其中可以定义加法和数乘如下：

$$(\omega_1+\omega_2)_P=(\omega_1)_P+(\omega_2)_P$$

$$(\lambda\omega)_P=\lambda\omega_P \quad \lambda\in R$$

这样$C^\infty(M, T^*M)$构成实数域上的向量空间。如果上式中的λ是M上的C^∞函数，即

$$(\lambda\omega)_P=\lambda(P)\omega_P, \quad \lambda\in C^\infty(M).$$

则$C^\infty(M, T^*M)$构成M上的C^∞函数环上的模。

下面讨论1－形式的局部坐标表示。

设(U, φ)是M的一个局部坐标系，以$x^1, \cdots, x^n$为坐标函数，U是M的开子流形，$T^*(M)$是U的上切丛。考虑映射

$$dx^i: U\longrightarrow T^*(U), \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

使$dx^i: P\in U\longrightarrow dx^i|_P$，显然$dx^i\in C^\infty(U, T^*U)$即$dx^i$是$U$上的光滑1－形式。

如果$\omega\in C^\infty(U, T^*U)$，则

$\tilde{\varphi}\circ\omega\circ\varphi^{-1}$：$(x^1, \cdots, x^n)\mapsto(x^1, \cdots, x^n, a_1, \cdots, a_n)$是$C^\infty$映射，其中$\omega_P=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i(P)dx^i|_P$

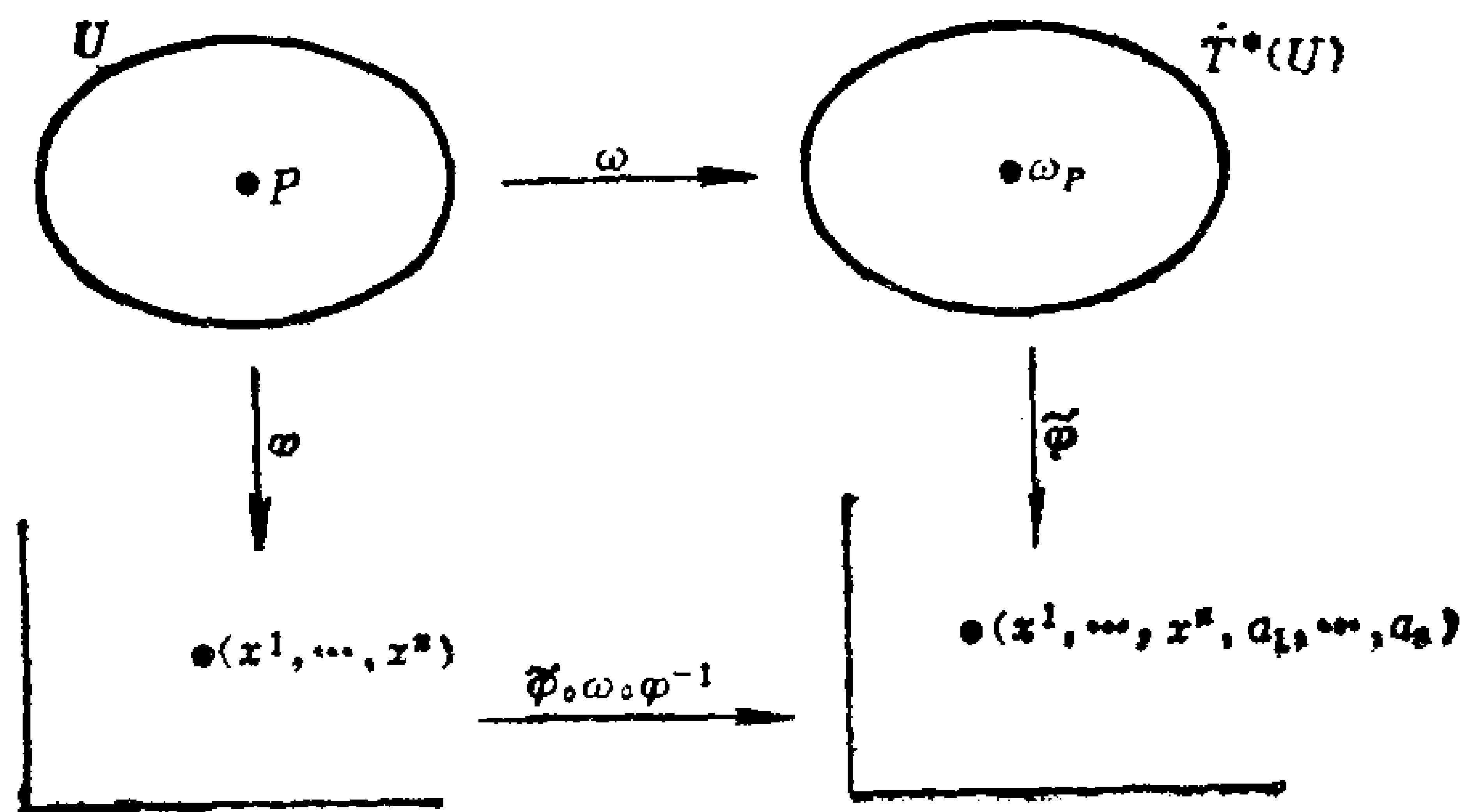


图 2.20

所以，a_i, $i=1, 2, \cdots, n$是U上的C^∞函数，反之也对。这样M上的每个光滑1－形式ω，在局部坐标系(U, φ)之下，可以表示为

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} a_i dx^i$$

其中$\{dx^i, i=1, 2, \cdots, n\}$称为上切（或余切）标架场，也称为局部基，$a_i$是$U$上的光滑函数。

参照上一节内容，对于$f\in C^\infty(M)$，$X\in C^\infty(M, TM)$，我们可以定义

$$df(X)|_P=(df)_P X_P=X_P f=(Xf)_P$$

所以，可以记成

$$df(X)=X(f).$$

设 $X=\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$，则

$$df(X)=\sum_{i=1}^{n} a^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

由于a^i和$\frac{\partial}{\partial x^i}$都是$C^\infty$的，所以$df(X)\in C^\infty(M)$。同时由于

$$df=\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

所以df是M上的光滑微分1－形式。

第三章　流形上的积分

§3.1　张量与张量场

在第一章1.1.2中我们已经介绍了向量空间的张量和张量积的概念。向量空间V上的张量T是一个多线性函数。

$$T: \underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{r个}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{s个}\to R$$

即满足：

$T(v_1, \cdots, \alpha v_k+\beta v_k', \cdots)=\alpha T(v_1,\cdots,v_k,\cdots)+\beta T(v_1,\cdots,v_k',\cdots)$

其中$\alpha,\beta\in R$，v_k、$v_k'\in V$（或V^*）。这种张量称为r阶逆变，s阶协变张量。记成(r,s)—张量．我们用V_s^r表示全体V上的(r,s)—张量所构成的空间，它是一个n^{r+s}维向量空间，以

$$e_{i_1}\otimes\cdots\otimes e_{i_r}\otimes e^*_{j_1}\otimes\cdots\otimes e^*_{j_s},\quad i_1,\cdots,i_r,j_1,\cdots,j_s=1,\cdots,n.$$

为基底。其中$e_1,\cdots,e_n$是V的基，$e_1^*,\cdots,e_n^*$是V^*中的对偶基。

如果V和W都是向量空间，F_*: $V\to W$是线性映射，我们诱导出一个叫拉回映射的

$$F^*: W_s\to V_s$$

其对应法则是：对于任何$T\in W_s$和$v_1,\cdots,v_s\in V$。

$$F^*(T)(v_1,\cdots,v_s)=T(F_*(v_1),\cdots,F_*(v_s))$$

这个定义显然是有意义的，不过只对协变张量才行。

1．对称张量与反称张量

定义1　协变张量$T\in V_r$被称为对称的，如果$T(\cdots v_i,\cdots v_j\cdots)=T(\cdots v_j,\cdots,v_i,\cdots)$ $1\leqslant i, j\leqslant r$．即当任两个向量对调位置时，值不变；协变张量$T\in V_r$被称为反称的，如果$T(\cdots v_i,\cdots,v_j\cdots)=-T(\cdots v_j,\cdots,v_i\cdots)$ $1\leqslant i, j\leqslant r$，即当两个向量对调位

置时值变号。

如果用σ表示r个数$(1,\cdots,r)$的一个置换

$$\sigma: (1,2,\cdots,r)\mapsto(\sigma(1),\cdots,\sigma(r))$$

置换σ的符号用$\mathrm{sgn}\sigma$表示。

$$\mathrm{sgn}\sigma=\begin{cases}+1 & \sigma\text{为偶数个对换之积。}\\ -1 & \sigma\text{为奇数个对换之积。}\end{cases}$$

则我们可以得到与上述定义等价的定义。

定义 2 $T\in V_r$是对称的，如果对任意的置换σ，有$T(v_1,\cdots,v_r)=T(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)})$；$T\in V_r$是反称的，如果对任意的置换$\sigma$，有

$$T(v_1,\cdots,v_r)=\mathrm{sgn}\sigma T(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)})$$

V_r中所有对称张量构成V_r的子空间，用$\Sigma^r(V)$来表示；V_r中所有反称张量构成V_r的子空间，用$\Lambda^r(V)$来表示。一般的协变张量可能既不是对称的，也不是反称的，我们可以找到一种手续，由原来的张量构造出一个新的张量。使这个张量是对称的或反称的，这种手续就叫做张量的对称化或反称化，对于任意的张量$T\in V_r$，它的对称化记成φT，反称化记成$\mathscr{A}T$，办法是

$$(\varphi T)(v_1,\cdots,v_r)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\sigma_r}T(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)});$$

$$(\mathscr{A}T)(v_1,\cdots,v_r)=\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in\sigma_r}\mathrm{sgn}\sigma T(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)}).$$

其中σ_r表示r个字母的全部置换之集。

张量的对称化与反称化有下面的性质：

命题 1 $\mathscr{S}$和$\mathscr{A}$是线性变换而且满足

（1）$\mathscr{A}^2=\mathscr{A}$，$\mathscr{S}^2=\mathscr{S}$；

（2）$\mathscr{A}(V_r)=\Lambda^r(V)$，$\mathscr{S}(V_r)=\Sigma^r(V)$；

（3）T是反称的，当且仅当 $\mathscr{A}T=T$，

T是对称的，当且仅当 $\mathscr{S}T=T$；

（4）若F_*: $V\to W$是线性映射，则$\mathscr{A}$，$\mathscr{S}$与F^*: $W_r\to V_r$

是可交换的。即

$$\mathscr{A}\circ F^*=F^*\circ A,\quad \mathscr{S}\circ F^*=F^*\circ\mathscr{S}.$$

证明留给读者完成。

2. 协变张量的张量积

在向量空间V上，一阶协变张量空间$V_1=V^*$，就是V的对偶空间。还可得到二阶，三阶等等协变张量空间$V_2, V_3, \cdots$如果再规定$V_0=R$，即把实数空间作为零阶协变张量空间，我们作V上所有协变张量空间的直和。

$$T(V)=V_0\oplus V_1\oplus\cdots\oplus V_r\oplus\cdots$$

现在，考虑$T(V)$中的乘法运算，称为"张量积"。

定义 3 设$\Phi\in V_r$，$\Psi\in V_s$，映射

$$\otimes: V_r\times V_s\to V_{r+s}$$

定义为

$$\Phi\otimes\Psi(v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_{r+s})$$
$$=\Phi(v_1,\cdots,v_r)\cdot\Psi(v_{r+1},\ \cdots,v_{r+s}).$$

其中$v_1,\cdots,v_r,v_{r+1},\cdots,v_{r+s}$都是$V$中的向量，记号$\Phi\otimes\Psi$称为$\Phi$和$\Psi$的张量积。

张量积具有下面的性质：

（1）$(\Phi_1+\Phi_2)\otimes\Psi=\Phi_1\otimes\Psi+\Phi_2\otimes\Psi$，

$\Phi\otimes(\Psi_1+\Psi_2)=\Phi\otimes\Psi_1+\Phi\otimes\Psi_2$；

（2）$(k\Phi)\otimes\Psi=\Phi\otimes(k\Psi)=k(\Phi\otimes\Psi)$；$(k\in R)$

（3）$(\Phi\otimes\Psi)\otimes T=\Phi\otimes(\Psi\otimes T)$，即张量积满足结合律，以后可记成$\Phi\otimes\Psi\otimes T$；

（4）如果$F_*: W\to V$是向量空间之间的线性映射，则对于$\forall\Phi$、$\Psi\in T(V)$

$$F^*(\Phi\otimes\Psi)=F^*\Phi\otimes F^*\Psi$$

关于（4），简单证明如下：

设$\Phi\in V_r$，$\Psi\in V_s, w_1,\cdots,w_{r+s}\in W$，则

$F^*(\Phi\otimes\Psi)(w_1\cdots,w_{r+s})$

$$=\Phi\otimes\Psi(F_*(w_1),\cdots,F_*(w_{r+s}))$$
$$=\Phi(F_*(w_1),\cdots,F_*(w_r))\cdot\Psi(F_*(w_{r+1}),\cdots,F_*(w_{r+s})).$$
$$=F^*\Phi(w_1,\cdots,w_r)\cdot F^*\Psi(w_{r+1},\cdots,w_{r+s})$$
$$=(F^*\Phi\otimes F^*\Psi)(w_1,\cdots,w_{r+s}) \qquad ||$$

可以看出，在$T(V)$中同一级的张量可以相加和用实数乘，因此，每一级都构成向量空间。而在整体中又有张量积。我们说$T(V)$构成分层的结合代数，称为张量代数。它是无限维的。

如果$e_1,\cdots,e_n$是向量空间V的一组基，$\omega^1,\cdots,\omega^n$是对偶空间V^*中的对偶基。则V_r的基是

$$\{\omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_r},\ 1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n\}$$

对于任意的V上的r阶协变张量$\Phi\in V_r$，有

$$\Phi=\sum_{1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n}\varphi_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_r}$$

3．反称张量的外积

我们知道向量空间V上的全体反称r阶协变张量$\Lambda^r(V)$构成V_r的子空间。如果再规定$\Lambda^0(V)=R$，$\Lambda^1(V)=V^*$。则我们可以得到

$$\Lambda(V)=\Lambda^0(V)\oplus\Lambda^1(V)\oplus\cdots\oplus\Lambda^r(V)\oplus\cdots$$

它是张量代数$T(V)$的分层子空间，但不是子代数。因为反称张量的张量积一般不再保持反称性。这样，在$\Lambda(V)$中将引入一种新的乘法——外乘，使$\Lambda(V)$在这种乘法上封闭。

定义 4 设$\Phi\in\Lambda^r(V)$，$\Psi\in\Lambda^s(V)$，映射

$$\wedge:\ \Lambda^r(V)\times\Lambda^s(V)\to\Lambda^{r+s}(V)$$

定义为：

$$\Phi\wedge\Psi=\frac{(r+s)!}{r!\,s!}\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi)$$

映射$\wedge$称为外乘，$\Phi\wedge\Psi$称为Φ和Ψ的外积。

外积具有下面的基本性质：

（1） $(\Phi_1+\Phi_2)\wedge\Psi=\Phi_1\wedge\Psi+\Phi_2\wedge\Psi$，

$$\Phi\wedge(\Psi_1+\Psi_2)=\Phi\wedge\Psi_1+\Phi\wedge\Psi_2;$$

（2） $(k\Phi)\wedge\Psi=\Phi\wedge(k\Psi)=k(\Phi\wedge\Psi)$，$k\in R$；

（3） $(\Phi\wedge\Psi)\wedge T=\Phi\wedge(\Psi\wedge T)$ 记成 $\Phi\wedge\Psi\wedge T$；

（4） $\Phi\wedge\Psi=(-1)^{rs}\Psi\wedge\Phi$。

（5）如果F_*：$W\to V$是向量空间之间的线性映射，则

$$F^*(\Phi\wedge\Psi)=F^*\Phi\wedge F^*\Psi$$

我们只证（4），其余的留给读者完成。

设τ是由（$1,\cdots,r,r+1,\cdots,r+s$）$\mapsto$（$r+1,\cdots,r+s,1,\cdots,r$）的置换。

$$\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi)(v_1,\cdots,v_{r+s})$$

$$=\frac{1}{(r+s)!}\sum_\sigma \mathrm{sgn}\sigma\Phi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)})\Psi(v_{\sigma(r+1)},\cdots,v_{\sigma(r+s)})$$

$$=\frac{1}{(r+s)!}\sum_\sigma \mathrm{sgn}\sigma\Psi(v_{\sigma(r+1)},\cdots,v_{\sigma(r+s)})\Phi(v_{\sigma(1)},\cdots,v_{\sigma(r)})$$

$$=\frac{1}{(r+s)!}\mathrm{sgn}\tau\sum_{\sigma\tau}\mathrm{sgn}\sigma\tau\Psi(v_{\sigma\tau(1)},\cdots,v_{\sigma\tau(s)})\Phi(v_{\sigma\tau(s+1)},\cdots v_{\sigma\tau(s+r)})$$

$$=\mathrm{sgn}\tau\mathscr{A}(\Psi\otimes\Phi)(v_1,\cdots,v_{r+s})$$

但$\mathrm{sgn}\tau=(-1)^{rs}$，所以

$$\mathscr{A}(\Phi\otimes\Psi)=(-1)^{rs}\mathscr{A}(\Psi\otimes\Phi)$$

即 $\Phi\wedge\Psi=(-1)^{rs}\Psi\wedge\Phi$ ||

由此性质容易看出，对于任意的 $\omega\in\Lambda^1(V)=V^*$，有$\omega\wedge\omega=0$，这一点是非常重要的。

下面的定理是基本的。

定理 1 若 $r>n=\dim V$，则 $\Lambda^r(V)=\{0\}$；若 $0\leqslant r\leqslant n$，则 $\dim\Lambda^r(V)=C^r_n$；若 $\omega^1,\cdots,\omega^n$ 是 $\Lambda^1(V)$ 的一组基，则

$$\{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r},\quad 1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant\cdots\leqslant i_r\leqslant n\}$$

是 $\Lambda^r(V)$ 的一组基且 $\dim\Lambda(V)=2^n$。

证明：（1）设 $e_1,\cdots,e_n$ 是V的基，$\Phi\in\Lambda^r(V)$，$r>n$。则

对于任意 r 个基向量的组 $e_{i_1},\cdots,e_{i_r}$ 中必有重复出现的基向量。设其中 $e_{i_k}=e_{i_k'}$，则

$$\begin{aligned}&\Phi(e_{i_1},\cdots,e_{i_k},\cdots,e_{i_k'},\cdots e_{i_r})\\=&-\Phi(e_{i_1},\cdots,e_{i_k'},\cdots,e_{i_k},\cdots e_{i_r})\end{aligned}$$

因而 $\Phi(e_{i_1},\cdots,e_{i_r})=0$，再由于 $e_{i_1},\cdots,e_{i_r}$ 是任意的．所以 $\Phi==0$，即 $\Lambda^r(V)=\{0\}$。

（2）设 $0\leqslant r\leqslant n$，$\omega^1,\cdots,\omega^n\in\Lambda^1(V)$ 是 $e_1,\cdots,e_n$ 的对偶基，则

$$\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}=r!\mathscr{A}(\omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_r})$$

设 $\Phi\in\Lambda^r(V)$，

$$\Phi=\sum_{1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n}\varphi_{i_1,\cdots,i_r}\omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_r}$$

由于 $\mathscr{A}\Phi=\Phi$，因此

$$\Phi=\mathscr{A}\Phi=\sum_{1\leqslant i_1,\cdots i_r\leqslant n}\varphi_{i_1\cdots i_r}\mathscr{A}(\omega^{i_1}\otimes\cdots\otimes\omega^{i_r})$$

$$=\frac{1}{r!}\sum_{1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n}\varphi_{i_1\cdots i_r}\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r}$$

其中 $i_1,\cdots,i_r$ 中有相同者，相应的项为0；$i_1,\cdots,i_r$ 的组合相同而顺序不同的项最多差一符号，可以合并成一项。因此C^r_n个元素的组

$$\{\omega^{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega^{i_r},\quad 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$$

张成 $\Lambda^r(V)$。容易证明它们还是线性无关的，所以，它们构成 $\Lambda^r(V)$ 的一组基

（3）由（2）知$\dim\Lambda^r(V)=C^r_n$。所以

$$\dim\Lambda(V)=\sum_{r=0}^{n}\dim\Lambda^r(V)=2^n \qquad \|$$

由此定理可以看出，$\Lambda^n(V)$的基是 $\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$。也就是说，$\Lambda^n(V)$ 是一维向量空间。$\Lambda^n(V)$ 中的元素之间彼此只差一倍数。

$$\Lambda(V)=\Lambda^0(V)\oplus\Lambda^1(V)\oplus\cdots\oplus\Lambda^n(V)$$

带有外积构成分层结合代数，称为向量空间V的外代数。

4．向量丛

定义 X、E是Hausdorff拓扑空间，π：$E\to X$是满的连续映射，且满足

（1）对于$\forall a\in X$，$\pi^{-1}(a)=E_a$具有q维实向量空间结构；

（2）对于$\forall a\in X$，$\exists a$的邻域U和同胚

$$\varphi_U:\ \pi^{-1}(U)=E_U\to U\times R^q$$

使得当p：$U\times R^q\to U$表示投影时，有$p\circ\varphi_U=\pi$。而且

$$\varphi_U|_{E_x}:\ E_x\to\{x\}\times R^q$$

是向量空间的同构。则称$\{E,X,\pi\}$为X上的秩为q的实向量丛。其中E称为丛空间，X称为底空间，π称为丛投影，$E_a=\pi^{-1}(a)$称为a上的纤维，R^q称为纤维型。

当X和E都是微分流形，π是C^∞映射且$\{\varphi_U\}$是微分同胚时，称$\{E,X,\pi\}$为微分向量丛。以后常省略"微分"二字，并简记为向量丛E。

当$q=1$时，特别称为线丛。

例 $E=X\times R^q$，π：$E\to X$是自然投影，则E称为平凡丛。即平凡丛同胚于一个拓扑积。一般的向量丛是非平凡的，但根据定义容易得，它在局部是平凡的。圆柱面可看成以圆为底的线丛，它是平凡的；Möbius带则可作为非平凡丛的模型。

如果考虑底空间X的开覆盖$\mathscr{U}=\{U_i\}$，则有：

$$\varphi_i:\ \pi^{-1}(U_i)\to U_i\times R^q$$

$$\varphi_j:\ \pi^{-1}(U_j)\to U_j\times R^q$$

当$x\in U_i\cap U_j$，$e\in\pi^{-1}(x)$

$$\varphi_i(e)=(x,v^i)$$

$$\varphi_j(e)=(x,v^j)$$

$$\varphi_j\circ\varphi_i^{-1}:\ (x,v^i)\to(x,v^j)=(x,g_{ji}(x)v^i)$$

其中$v^j=g_{ji}(x)v^i$，$g_{ji}(x)$是$R^q\to R^q$的非退化线性变换，即

$g_{ji}(x) \in Gl(q, R)$。$g_{ji}(x)$ 称为向量丛的过渡函数。它有如下性质：

（1）$x \in U_i \cap U_j \cap U_k$，$g_{ij}(x) \circ g_{jk}(x) = g_{ik}(x)$；

（2）$g_{ii}(x) =$ 恒同（相当于 $Gl(q, R)$ 中的单位矩阵）；

（3）$q_{ij}^{-1}(x) = q_{ji}(x)$；

（4）q_{ij}：$x \mapsto q_{ij}(x)$ 是 $U_i \cap U_j \to Gl(q, R)$ 的连续映射，对微分丛来说，是 C^∞ 映射。

例 考虑流形 M 的切丛 $T(M)$，显然它是一个秩为 $n = \dim M$ 的向量丛，对于 $P \in M$ 处的两个坐标域 U 和 V，设 U 的坐标函数是 $(x^1, \cdots, x^n)$，V 的坐标函数为 $(y^1, \cdots, y^n)$。则 P 处任一向量 $X_P \in T_P(M)$ 可以表示为：

$$X_P = \sum_i \nu^i \frac{\alpha}{\partial x^i}\bigg|_P$$

或

$$X_P = \sum_j \nu'^j \frac{\partial}{\partial y^j}\bigg|_P$$

易知

$$\begin{pmatrix} \nu'^1 \\ \vdots \\ \nu'^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial y^{1n}}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}_P \begin{pmatrix} \nu^1 \\ \vdots \\ \nu^n \end{pmatrix}$$

即

$$g_{VU}(P) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1}, \cdots, \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} \cdots \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}_P$$

对于 M 的上切丛，也有类似的情况。

定义 2 微分向量丛 $\{E, X, \pi\}$ 中，C^∞ 映射

$$S: X \to E$$

使得：$\pi \circ S = 1_X$ 是 X 上的恒同，则称 S 为向量丛 E 上的一个 C^∞ 截面。

例 流形M的切丛$T(M)$中的截面就是M上的光滑向量场。M的上切丛$T^*(M)$中的截面就是M上的微分1-形式。

2. 流形上的张量场

对于流形M上每一点p处的切空间$T_p(M)$和上切空间$T_p^*(M)$，我们可得相应的张量空间$T_s^r(M)_p$，$(M_p)_r$，等等。因而与前面类似的方法，可得到M上相应的向量丛：$T_s^r(M)=\bigcup\limits_{P\in M}T_s^r(M_P)$称为$M$上的$(r,s)$——张量丛。$M$上的向量丛$T^r(M)=\bigcup\limits_{P\in M}(M_P)_r$称为$M$上的$r$阶协变张量丛等等。

这些向量丛的C^∞截面就称为M上的张量场。例如，M上的r阶协变张量场是截面Φ：$M\to T^r(M)$，满足$\pi\cdot\Phi=I_M$。其中π表示丛投影，I_M表示M到自身的恒同映射。

M上全体$C^\infty r$阶协变张量场构成R上的向量空间，记成$C^\infty(M,T^r(M))$。如果$X_1,\cdots,X_r$是M上r个C^∞向量场，定义$\Phi(X_1,\cdots,X_r)(P)=\Phi_P(X_1(P),\cdots,X_r(P))$。其中$\Phi_P=\Phi(P)$表示张量场$\Phi$在$p$点的值。

我们知道，向量空间中的协变张量是作用在向量上的，其值为数值。而流形上的张量场是作用在向量场上的，其值为流形上的函数。显然的，协变张量场在实数R上是线性的，即有如下的性质：

$$\Phi(X_1,\cdots,aX_i+bX_i',\cdots,X_r)$$
$$=a\Phi(X_1,\cdots,X_i,\cdots,X_r)+b\Phi(X_1,\cdots,X_i',\cdots,X_r)$$

其中a，$b\in R$。如果把a，b换成M上的C^∞函数，性质仍然成立。这说明协变张量场对于$C^\infty(M)$也是线性的，所以$C^\infty(M,T^r(M))$是M上C^∞函数环上的模。

如果$U\subset M$是开集，则M上的C^∞张量场限制到U上，就得到U上的C^∞张量场。因此，我们可以考虑M的某个局部坐标域的张量场。设$(U;x^1,\cdots,x^n)$是M的一个局部坐标系，$P\in U$是

U上任意一点，$\left\{\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_P;\ i=1,\cdots,n\right\}$是$P$点处切空间$M_P$的基，则$\left\{\frac{\partial}{\partial x^i};\ i=1,\cdots,n\right\}$是$U$上模$C^\infty(U,T(U))$的基。完全类似地，$\{dx^i,\ i=1,\ \cdots,\ n\}$是$U$上模$C^\infty(U,T^*(U))$的基。从上节的讨论，我们知道$\{dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_r};\ 1\leqslant i_1,\cdots,i_r\leqslant n\}$构成$C^\infty(U,T^r(U))$的一组基。因此，$U$上的任一$C^\infty$ r阶协变张量场Φ都可以表示成

$$\Phi=\sum_{1\leqslant i_1\cdots i_r\leqslant n}\varphi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\otimes\cdots\otimes dx^{i_r}$$

其中$\varphi_{i_1\cdots i_r}$是U上的C^∞函数。由此进一步可以看出。如果$X_1,\cdots,X_r$是M上的C^∞向量场，Φ是C^∞ r阶协变张量场，则$\Phi(X_1,\cdots,X_r)$是M上的C^∞函数。

向量空间上的拉回映射也可以推广到流形上。设F：$M\to N$是C^∞流形之间的C^∞映射。则F_*：$M_P\to N_{F(P)}$是F在$P\in M$点的切映射。由此可以诱导出拉回映射

$$F^*:\ T^r(N_{F(P)})\to T^r(M_P)$$

使得

$$\begin{aligned}&(F^*\Phi_{F(P)})(X_{1_P},\cdots,X_{r_P})\\&=\Phi_{F(P)}(F_*(X_{1_P}),\cdots,F_*(X_{r_P}))\end{aligned}$$

其中$\Phi_{F(P)}\in T^r(N_{F(P)})$，$X_{1_P},\cdots,X_{r_P}\in M_P$，这样对于每个$P\in M$，有$F^*$：$\Phi_{F(P)}\mapsto(F^*\Phi_{F(P)})$。如果给出$N$上的任意的$r$阶协变张量场$\Phi$，则在$F(M)\subset N$上诱导出映射

$$F^*:\ \Phi\mapsto F^*\Phi$$

使得：

$$(F^*\Phi)_P(X_{1_P},\cdots,X_{r_P})=\Phi_{F(P)}(F_*(X_{1_P}),\ \cdots,F_*(X_{r_P}))$$

即拉回映射F^*把N上的协变张量场映射成M上的同阶的协变张量场。需要注意的是，对于逆变张量场，类似的映射不一定存在．因此这是协变张量场的一个特殊性质。容易证明：

$$F^*: T^r(N) \to T^r(M)$$

是线性的。而且保持对称性或反称性。这里我们用张量丛的记号 $T^r(M)$，$T^r(N)$ 代替了张量场空间的记号 $C^\infty(M, T^r(M))$，$C^\infty(N, T^r(N))$。这只是为了方便。

流形上的协变张量场的一个重要例子是度量张量。在 C^∞－流形M上，一个对称、正定二阶协变张量场 Φ 称为 M 上的一个**黎曼**（Riemann）**度量**。具有黎曼度量的流形称为**黎曼流形**。在这种流形上具有丰富的几何性质。例如可以有弧长、面积、测地线等等，研究这种流形上的几何就是所谓**黎曼几何**。

§3.2 微分形式与外微分

1. 微分形式

为了方便，我们仍用 $T^r(M)$ 表示M上 C^∞ 的 r 阶协变张量场空间，再命 $\Lambda^0(M)=T^0(M)=C^\infty(M)$，即表示$M$上全体 C^∞函数。命 $\Lambda^1(M)=T^1(M)$ 表示M上全体 C^∞的一次形式，$\Lambda^r(M) \subset T^r(M)$ 表示M上全体 C^∞的 r 阶反称协变张量场。

定义 1 M上的 C^∞ r 阶反称协变张量场称为M上的 r 阶外微分形式，简记为 r－形式。

考虑直和 $\Lambda(M)=\Lambda^0(M)\oplus\Lambda^1(M)\oplus\cdots\oplus\Lambda^n(M)$。

在其中定义“外积”如下：对于M上的任意的 r－形式 $\Phi\in\Lambda^r(M)$ 和 s－形式 $\Psi\in\Lambda^s(M)$，定义外积 $\Phi\wedge\Psi\in\Lambda^{r+s}(M)$ 为

$$(\Phi\wedge\Psi)_p=\Phi_p\wedge\Psi_p.$$

显然，它满足结合律，而且$\Phi\wedge\Psi=(-1)^{rs}\Psi\wedge\Phi$。因此，$\Lambda(M)$构成 R 上的分层代数，称为M上的微分形式代数或外代数。

在M的局部坐标系 $(U; x^1, \cdots, x^n)$ 上，$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}; i=1, \cdots, n\right\}$ 是U上的标架场，$\{dx^i; \ i=1, \cdots, n\}$ 是上切标架场。则 $\{dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}; \ 1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n\}$是 $\Lambda^r(U)$ 的基。任何 r－形式 $\Phi\in\Lambda^r(U)$ 可表成

$$\Phi=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_r\leqslant n}\varphi_{i_1\cdots i_r}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_r}$$

特别地，每个U上的n－形式ω可表示为

$$\omega=f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

在两个局部坐标域的交$U\cap V$中，若其坐标变换为。

$$\begin{cases} y^1=y^1(x^1,\cdots,x^n) \\ y^n=y^n(x^1,\cdots,x^n) \end{cases}$$

则

$$dy^j=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial y^j}{\partial x^i}dx^i,\quad j=1,\cdots,n$$

因此

$$dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y^1}{\partial x^1}, & \cdots & \dfrac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ & \cdots\cdots & \\ \dfrac{\partial y^n}{\partial x^1} & \cdots & \dfrac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{vmatrix}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

这时，若$\omega=g(y)dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$，则

$$\omega=g(y(x))\det\left(\frac{\partial yi}{\partial x^j}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

所以

$$f(x)=g(y^1(x),\cdots,y^n(x))\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right)$$

最后，对于C^∞映射F：$M\to N$，相应的拉回映射F^*：$\Lambda(N)\to\Lambda(M)$是一个代数同态，即满足以下性质：

$$F^*(\Phi_1+\Phi_2)=F^*(\Phi_1)+F^*(\Phi_2)$$

$$F^*(g\Phi)=(g\circ F)F^*(\Phi)$$

$$F^*(\Phi\wedge\Psi)=F^*(\Phi)\wedge F^*(\Psi)$$

其中$\Phi_1,\Phi_2,\Phi\in\Lambda^r(M)$，$\Psi\in\Lambda^s(N)$，$g\in C^\infty(N)$。还需申明一点，当$f\in C^\infty(N)=\Lambda^0(N)$时，由$F$诱导的拉回映射使

$$F^*(f)=f\circ F$$

2. 外微分算子

我们曾经在流形上引入了函数的微分，即对于M上的任何C^∞函数$f\in C^\infty(M)$，$df|_p\in M_p^*$。df就是M上的1－形式。因此可以说，算子d：$\Lambda^0(M)\to\Lambda^1(M)$是把$M$上的0－形式映成1－形式。我们要把这一算子推广到$M$的外代数$\Lambda(M)$上。

定义 2 M的外代数$\Lambda(M)$上的外微分算子d是映射

$$d: \Lambda^k(M)\to\Lambda^{k+1}(M)$$

其中$k=0,1,\cdots,n$.它在M的局部坐标系下的具体表示为：若

$$\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\omega_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

是k－形式，则

$$d\omega=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<ik\leqslant n}d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge dx^{i}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

$$=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^j}dx^j\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

特别当$\omega=f\in\Lambda^0(M)$时，局部表示为

$$df=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x^j}dx^j$$

这与函数的微分是完全一致的，由定义还可看出，当$\omega\in\Lambda^n(M)$时，$d\omega=0$.

命题 1 外微分算子有下列性质

(1) $d(\omega+\eta)=d\omega+d\eta$，$\omega$，$\eta$是$k$－形式；

(2) $d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^k\omega\wedge d\eta$，$\omega$是$k$－形式，$\eta$是$l$－形式；

(3) $d(d\omega)=0$，即$d^2=0$；

(4) $F^*(d\omega)=d(F^*\omega)$.

证明：前两条可由定义直接验证。

下面证明第三条：

$$d\omega=\sum\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^\alpha}dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

$$d(d\omega)=\sum\sum_{\alpha=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{n}\frac{\partial^2\omega_{i_1\cdots i_k}}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}dx^\beta\wedge dx^\alpha\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$$

其中$\alpha=i$，$\beta=j$的项与$\alpha=j$，$\beta=i$的项恰好反号，互相抵消。所以，$d(d\omega)=0$，即$d^2=0$。

再证明第四条：

设F：$M^m\to N^n$是C^∞映射，m，n分别表示流形M和N的维数。对于N上的任一k－形式$\omega\in\Lambda(N)$，$k\leqslant m$，$k\leqslant n$。$F^*(\omega)$是M上的k－形式。对k用归纳法：

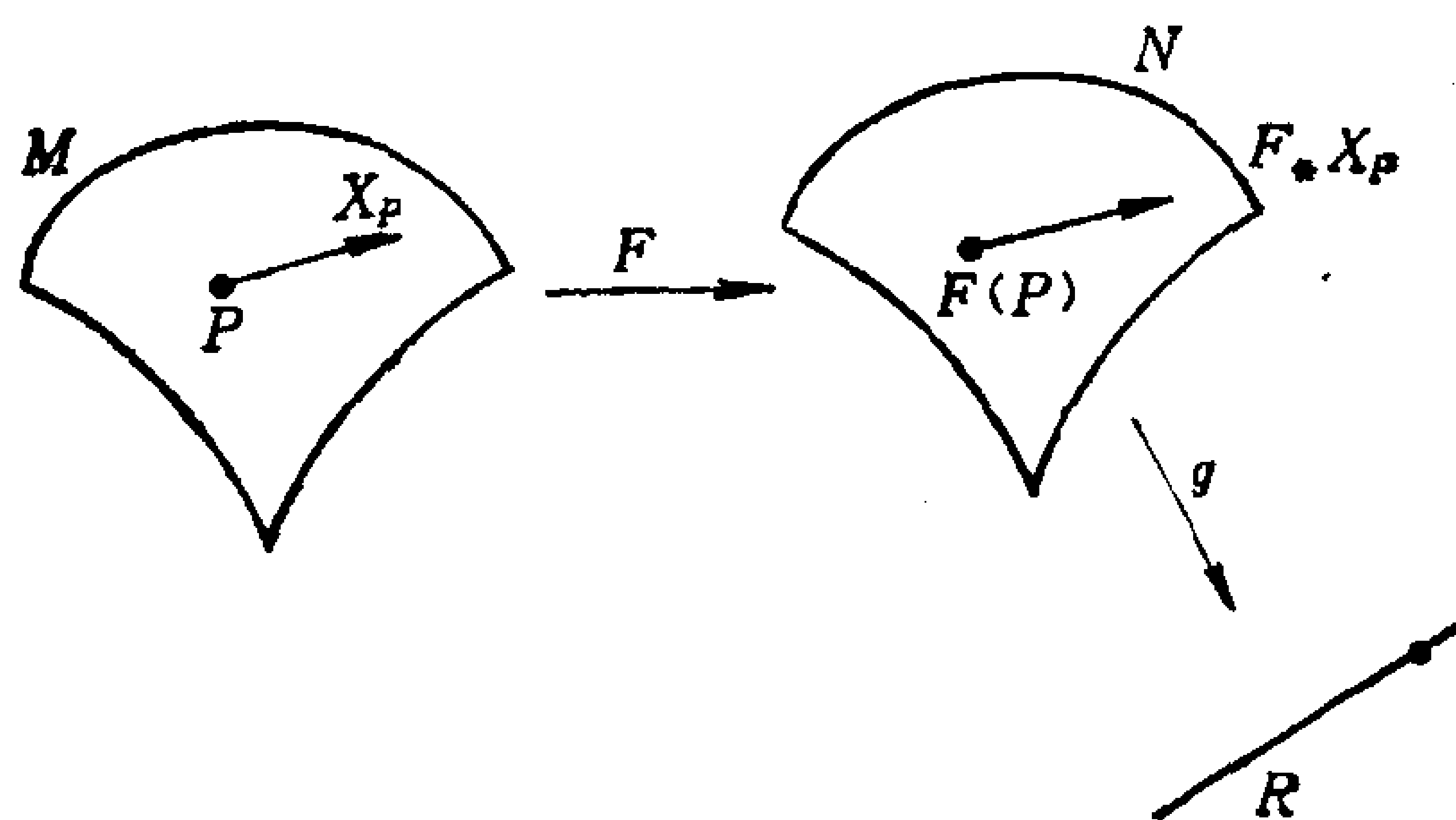


图 3.1

当ω是N上的 0 －形式，即C^∞函数g时，

$$\begin{aligned}d(F^*(g))(X_P)&=d(g\circ F)(X_P)\\&=X_P(g\circ F)\\&=(F_*X_P)(g)\\&=dg(F_*X_P)\\&=F^*(dg)(X_P).\end{aligned}$$

即此时等式成立。

再设ω是k－形式时等式成立。证明$k+1$的情形。很清楚，任一$k+1$－形式，可以表成$\omega\wedge dx^i$的和的形式，其中ω

为 k 一形式。由 F^* 和 d 是线性的，只对 $\omega\wedge dx^I$ 证明命题就行了。

$$\begin{aligned}F^*(d(\omega\wedge dx^I))&=F^*(d\omega\wedge dx^I)\\&=F^*(d\omega)\wedge F^*(dx^I)\\&=d(F^*\omega\wedge F^*(dx^I))\\&=d(F^*(\omega\wedge dx^I)).\qquad \|\end{aligned}$$

定义 8 若 $d\omega=0$，则称 ω 为闭形式；若存在微分形式 η，使得 $d\eta=\omega$，则称 ω 为恰当形式。显然，每个恰当形式一定是闭的。反之，是否每个闭形式一定是恰当的呢？这是一个微妙的问题。先看下面的例子。

例 1 设 R^2 上的 1 一形式 $\omega=Pdx+Qdy$ 是闭的，则 $d\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy=0$。所以必须满足条件 $\frac{\partial Q}{dx}=\frac{\partial P}{\partial y}$，如果选一个函数 $f(x,y)=\int_0^x P(t,0)dt+\int_0^y Q(x,t)dt$，则 $df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy=Pdx+Qdy=\omega$，这说明在 R^2 上对 1 一形式来说，闭的一定是恰当的。

例 2 在 $R^2-\{0\}$ 上，考虑 1 一形式

$$\omega=\frac{-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$$

由于 $d\omega=0$，所以 ω 是闭的，再考虑平面上的极坐标系：$r=\sqrt{x^2+y^2}$。

$$\theta(x,y)=\begin{cases}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x>0,\ y\geqslant 0\\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x<0,\\ 2\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x}, & x>0,\ y<0\\ \pi/2, & x=0,\ y>0\\ 3\pi/2, & x=0,\ y<0\end{cases}$$

设 $A=\{(x,y)\in R^2;\ x<0$ 或 $x\geqslant 0$ 而 $y\neq 0\}$，则$\theta(x,y)$是A上的连续函数。而在 $R^2-\{0\}$ 上却不连续，在A上有

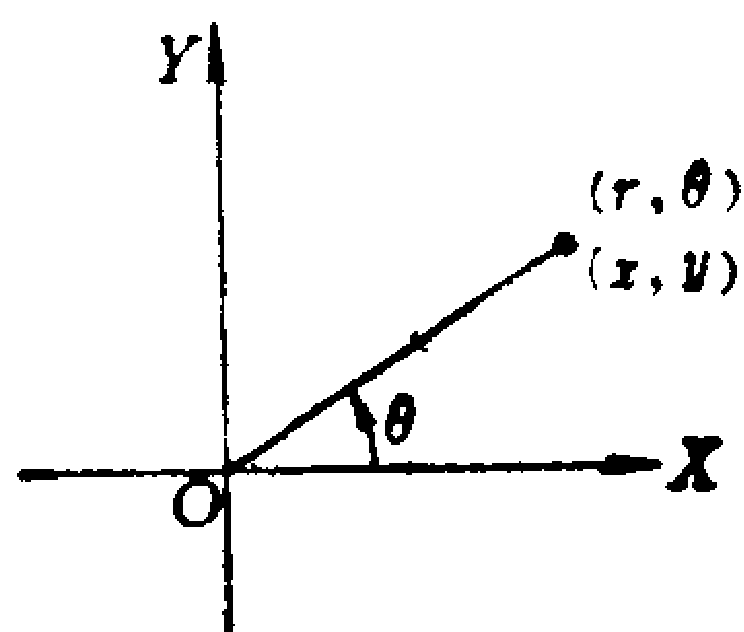


图 3.2

$$d\theta=\frac{\partial\theta}{\partial x}dx+\frac{\partial\theta}{\partial y}dy=-\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy=\omega$$

如果在 $R^2-\{0\}$上存在一个 C^∞函数 f，使得$df=\omega$，则在A上应有$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial\theta}{\partial x}$，$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\theta}{\partial y}$. 所以$f=\theta+$常数。但这是不可能的. 因为在$x$正半轴上$\theta$不连续，当然$f$也不连续，这与$f$的假设矛盾，上面的论述说明，在$R^2-\{0\}$ 上存在闭而不恰当的1－形式。

对于这个问题，Poincare 引理给出了很好的答案。R^n 中的星形开集A定义为一个开集。对于它的每一点x，线段ox都在A内。

Poincare 引理 若 $A\subseteq R^n$ 是对于0点的星形开集，则A上的每个闭形式都是恰当的.

我们略去引理的证明，可参看M.Spivak:“流形上的微积分。”此引理不难推广到微分流形上。

下面的命题说明外微分d与括号运算的关系。

命题 2 若ω是M上的1－形式，X，Y是M上的C^∞向量场，则有：

$d\omega(X,Y)=X\omega(Y)-Y\omega(X)-\omega([X,Y])$.

证明：只要在$\omega=fdg$的情形下证明就够了，其中f、g都

是M上的 C^∞函数。

左边$=d(fdg)(X,Y)$

$=(df\wedge dg)(X,Y)$

$=df(X)dg(Y)-dg(X)df(Y)$

$=(Xf)(Yg)-(Xg)(Yf)$

右边$=X((fdg)(Y))-Y((fdg)(X))-(fdg)([X,Y])$

$=X(f(Yg))-Y(f(Xg))-f(XYg-YXg)$

$=(Xf)(Yg)-(Yf)(Xg)$ ||

3. Frobenius 定理的对偶形式

我们要利用前面的知识和命题 2，论证 Frobenius 定理的另一种形式。

Frobenius 定理 M是C^∞的n维流形，Δ是M上C^∞的k－分布，则Δ是对合的充要条件是在每一点$P\in M$的邻域V中，存在$n-k$个线性无关的1－形式ω^{k+1}，ω^{k+2}，$\cdots,\omega^n$。使得满足

(1) $\omega^r(X)=0$，$r=k+1,\cdots,n$，$X\in\Delta$；

(2) $d\omega^r=\sum\limits_{l=k+1}^{n}\theta_l^r\wedge\omega^l$，$r=k+1,\cdots,n$，

θ_l^r为1－形式。

证明：设Δ已给定，在每点$P\in M$的邻域V中存在Δ的局部基$X_1,\cdots,X_k$。自然可以扩充为$X_1,\cdots,X_k,X_{k+1},\cdots,X_n$。使它们都是$C^\infty$的，而在$V$中每个点处都构成切空间的基。再设它们的对偶基是$\omega^1,\cdots,\omega^k,\omega^{k+1},\cdots,\omega^n$。显然，$\omega^{k+1},\cdots,\omega^n$作用于$X_1,\cdots,X_k$均为0，这就满足了条件(1)。

如果Δ是对合的。即

$$[X_i,X_j]=\sum_l C_{ij}^l X_l \quad (i,j,l=1,2,\cdots,k)。$$

应用前面的命题 2。

$$d\omega^r(X_i,X_j)$$

$$=X_i\omega^r(X_j)-X_j\omega^r(X_i)-\omega^r([X_i,X_j])$$
$$=0$$

其中 $r=k+1,\cdots,n$； $i,j,l=1,2,\cdots,k$。另一方面

$$d\omega^r=\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{n}b^r_{st}\omega^s\wedge\omega^t.$$

其中 $b^r_{st}=-b^r_{ts}$。$r=k+1,\cdots,n$。所以

$$d\omega^r(X_i,X_j)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{s,t=1}^{n}b^r_{st}[\omega^s(X_i)\omega^t(X_j)-\omega^t(X_i)\omega^s(X_j)]$$
$$=\frac{1}{2}(b^r_{ij}-b^r_{ji})=b^r_{ij}$$

显然，当 $s,t=1,2,\cdots,k$ 时，$b^r_{st}=0$，即在 $\omega^s\wedge\omega^t$ 中，s，t 至少有一个大于 k。故可改写成形式

$$d\omega^r=\sum_{l=k+1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}a^r_{i}\omega^i\right)\wedge\omega^l$$

记为 $$d\omega^r=\sum_{l=k+1}^{n}\theta^r_l\wedge\omega^l.$$

反之，若条件（2）成立，则

$$d\omega^r(X_i,X_j)=\sum_{l=k+1}^{n}\theta^r_l\wedge\omega^l(X_i,X_j)=0$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,k$。再用前面的命题 2，对于 $r=k+1,\cdots,n$，有

$$0=d\omega^r(X_i,X_j)$$
$$=X_i\omega^r(X_j)-X_j\omega^r(X_i)-\omega^r([X_i,X_j])$$
$$=-\omega^r([X_i,X_j])$$

所以 $[X_i, X_j] = \sum_l C^l_{ij} X_l \quad i, j, l = 1, 2, \cdots, k$ 即Δ是对合的。‖

最后，我们简单介绍一种 $\Lambda(M)$ 中的新的算子—内乘。

定义 4 X是M上的C^∞向量场，算子 $i_X: \Lambda^k(M) \to \Lambda^{k-1}(M)$ 称为用X的收缩或内乘，必须满足以下条件：

（1）如果 $f \in \Lambda^0(M)$，则 $i_X f = 0$；

（2）如果 $\omega \in \Lambda^k(M)$，则

$$(i_X\omega)(X_1, \cdots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \cdots, X_{k-1})$$

其中 $X_1, \cdots, X_{k-1}$ 都是M上的 C^∞向量场。

命题 3 内乘算子 i_X 有下列性质：

（1）$(i_X)^2 = 0$；

（2）$i_X(\omega + \eta) = i_X\omega + i_X\eta$；

（3）$i_{X+Y} = i_X + i_Y$；

（4）$i_{fX} = f i_X$；

（5）$i_X(\omega \wedge z) = i_X\omega \wedge z + (-1)^k(\omega \wedge i_X z)$。

其中，$f \in \Lambda^0(M)$，$X, Y \in T(M)$，$\omega, \eta \in \Lambda^k(M)$，$z \in \Lambda^l(M)$。

证明：（1）—（4）的证明是显然的。下面只证（5）。对k用归纳法：

设在局部坐标系下，$\omega = f dx^i$，则

$$\begin{aligned}
& i_X(f dx^i \wedge z)(X_1, \cdots, X_l) \\
&= (f dx^i \wedge z)(X, X_1, \cdots, X_l) \\
&= f dx^i(X)\, z\,(X_1, \cdots, X_l) + \sum_j (-1)^j f dx^i(X_j) \\
&\quad \times z\,(X, X_1, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_l) \\
&= [i_X(f dx^i) \wedge z + (-1)^1 f dx^i \wedge i_X z](X_1, \cdots, X_l).
\end{aligned}$$

即等式成立。再设等式对ω为（$k-1$）—形式也成立。来证明k—形式的情形。设 $\omega = \omega_1 \wedge dx^i$，$\omega_1$ 是（$k-1$）—形式。则

$$i_X(\omega\wedge z)=i_X(\omega_1\wedge dx^i\wedge z)$$

$$=i_X\omega_1\wedge(dx^i\wedge z)+(-1)^{k-1}\omega_1\wedge i_X(dx^i\wedge z)$$

$$=i_X\omega_1\wedge dx^i\wedge z+(-1)^{k-1}\omega_1\wedge i_X dx^i\wedge z+(-1)^k\omega_1\wedge dx^i\wedge i_X z$$

$$=i_X\omega_1\wedge z+(-1)^k\omega\wedge i_X z$$

至于一般情形，$\omega=\Sigma\omega_{i_1\cdots i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k}$，只要利用(2)就可得到。

§3.3 形式的积分和 Stokes 定理

1. 流形上的单位分解

在第一章中，我们研究了欧氏空间中单位分解的存在性，在微分流形中单位分解仍然存在，有下面的定理。

定理1 设$\{W_\alpha\}$为流形M的任意的开覆盖，则在M上存在C^∞函数组$G=\{g_\beta;\ \beta=1,2,\cdots\}$，使得：

(1) $g_\beta\geqslant 0$，$\beta=1,2,\cdots$；

(2) 对于M上任一点x，存在x的邻域U_x使得只有有限个g_β在U_x上不为0；

(3) 对M上的每一点x，$\sum\limits_{\beta=1}^{\infty}g_\beta(x)=1$；

(4) 对每个$g_\beta\in G$，存在一个W_α，使$\mathrm{supp}g_\beta\subset W_\alpha$。其中$\mathrm{supp}g_\beta=\{x\in M;\ g_\beta(x)\neq 0\}$的闭包，称为函数$g_\beta$的支集。

满足定理中各条性质的函数组$G=\{g_\beta\}$称为流形M的从属于开覆盖$\{W_\alpha\}$的单位分解。

定理的证明可参看 C. Goffman：多元微积分等书。

2. 向量空间的定向

直线有两个方向，但在初等微积分中研究的数轴则是选定了直线的一个方向，这是给直线以定向。在平面解析几何中，选定一个右手系的坐标系，也就是给平面以定向。同样的道理可以考虑n维向量空间的定向问题。

设V是n维向量空间，在它的所有基底中定义等价关系：基$\{e_1, \cdots, e_n\}$与$\{e'_1, \cdots, e'_n\}$等价，如果

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j e_i, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

而且$\det(a^i_j) > 0$。可以记作$\{e_i\} \sim \{e'_i\}$。这样在向量空间V的基底中只存在两个等价类。

定义 1 向量空间V带有属于某一等价类的基底则称为定向的向量空间。

显然，给定V中一组基底$\{e_1, \cdots, e_n\}$，就在V中唯一确定了一个等价类，即包含$\{e_1, \cdots, e_n\}$的等价类。因此，也就给定了V的一个定向，可以记为定向

$$\mu = [e_1, \cdots, e_n]$$

V中与之相反的定向可以记为

$$-\mu = -[e_1, \cdots, e_n]$$

容易看出

$$\begin{aligned} \mu &= [e_1, \cdots, e_i, \cdots, e_j, \cdots, e_n] \\ &= -[e_1, \cdots, e_j, \cdots, e_i, \cdots, e_n] \end{aligned}$$

即是说，任意对调两个基向量的位置，则空间改变定向。

关于向量空间的定向。还需了解以下两点：

（1）任给一非零的$\Omega \in \Lambda^n(V)$，唯一确定V的一个定向。

设向量空间V有两组基$\{e_1, \cdots, e_n\}$和$\{e'_1, \cdots, e'_n\}$，

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a^i_j e_i, \quad j = 1, \cdots, n$$

显然，$\det(a^i_j) \neq 0$，再设σ表示置换$(1, \cdots, n) \mapsto (i_1, \cdots, i_n)$。则

$$\Omega(e'_1, \cdots, e'_n) = \sum_{i_1 \cdots i_n} a^{i_1}_1 \cdots a^{i_n}_n \Omega(e_{i_1}, \cdots, e_{i_n})$$

$$= \sum_{i_1 \cdots i_r} \operatorname{sgn}\sigma a_1^{\sigma(1)} \cdots a_n^{\sigma(n)} \Omega(e_1, \cdots, e_n)$$

$$= \det(a_j^i) \Omega(e_1, \cdots, e_n).$$

当$\{e_1, \cdots, e_n\} \sim \{e'_1, \cdots, e'_n\}$时，$\det(a_j^i) > 0$，这时，$\Omega(e_1, \cdots, e_n)$与$\Omega(e'_1, \cdots, e'_n)$同号；当$\{e_1, \cdots, e_n\}$与$\{e'_1, \cdots, e'_n\}$反向时，$\det(a_j^i) < 0$，这时$\Omega(e_1, \cdots, e_n)$与$\Omega(e'_1, \cdots, e'_n)$反号。所以，$\Omega$把$V$的基分为两类，其中一类使$\Omega > 0$，另一类使$\Omega < 0$。这正好是空间定向中所确定的两个等价类。若我们约定只选择使$\Omega > 0$的基底。则Ω唯一确定了V的定向。

由于向量空间V的所有n阶反称协变张量之间只差一个常数倍，所以全体非零的n阶反称协变张量也可以分为两类，其中同类之间相差正常数倍。所以，同类的Ω确定V的同一定向，即非零$\Omega \in \Lambda^n(V)$的这种分类正好对应向量空间V的两种定向。

（2）如果向量空间V中定义了内积T，则存在标准正交基$\{e_1, \cdots, e_n\}$。使得$T(e_i, e_j) = \delta_{ij}$，取$\mu = [e_1, \cdots, e_n]$为$V$的定向，则存在唯一的$n$阶反称协变张量$\omega \in \Lambda^n(V)$，使得$\omega(e_1, \cdots, e_n) = 1$。$\omega$称为向量空间$V$的体积元素。

设$\{e'_1, \cdots, e'_n\}$是V的另一组标准正交基，且

$$e'_j = \sum_{i=1}^{n} a_j^i e_i, \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

则
$$T(e'_i, e'_j) = \sum_{k, l} a_i^k a_j^l T(e_k, e_l)$$

$$= \sum_k a_i^k a_j^k = \delta_{ij}$$

所以$(a_j^i)(a_j^i)' = I$（单位方阵），即$\det(a_j^i) = \pm 1$。如果V是定向的，则$\det(a_j^i) = 1$。因此

$$\omega(e'_1, \cdots, e'_n) = \det(a_j^i) \omega(e_1, \cdots, e_n)$$
$$= 1$$

这说明，体积元素作用在任何定向的标准正交基上都得1。

例 在普通的欧氏平面上，设$\{e_1, e_2\}$为右手系标准正交基。通常的定向即是$\mu=[e_1, e_2]$。设$\{\omega^1, \omega^2\}$为$\{e_1, e_2\}$的对偶基。则$\omega^1\wedge\omega^2$是面积元素。因为$\omega^1\wedge\omega^2(e_1, e_2)=1$。

如果$v_1=b_1^1e_1+b_1^2e_2$，$v_2=b_2^1e_1+b_2^2e_2$是两个线性无关的向量，则

$$
\begin{aligned}
&\omega^1\wedge\omega^2(v_1, v_2)\\
&=\omega^1\wedge\omega^2(\sum b_1^ie_i,\ \sum b_2^ie_i)\\
&=\det\begin{pmatrix} b_1^1 & b_1^2 \\ b_2^1 & b_2^2 \end{pmatrix}\omega^1\wedge\omega^2(e_1, e_2)\\
&=\det(b_i^j)
\end{aligned}
$$

其绝对值表示以v_1, v_2为邻边的平行四边形的面积。其符号表示v_1, v_2成右手系还是左手系。因此，可以说$\omega^1\wedge\omega^2(v_1, v_2)$表示以$v_1, v_2$为邻边的平行四边形有向面积。

类似地，在R^n中$\Omega=\omega^1\wedge\cdots\wedge\omega^n$为其体积元素。其中$\{\omega^1, \cdots, \omega^n\}$是标准正交基$\{e_1, \cdots, e_n\}$的对偶基。

3. **流形的定向**

对流形M定向，就是要对M的每点x处的切空间M_x选择一适当的定向。由于流形有微分构造，在每点的局部坐标系内，很自然地，可以用欧氏空间中的通常定向，即右手系$\left[\frac{\partial}{\partial r^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial r^n}\right]$来确定$M_x$的定向。即取$\mu_x=\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\ \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right]$。但是这样选择定向，在$M$整体上存在一个是否彼此相容的问题。

定义 2 n维微分流形M称为可定向的，如果对于适当选择的M的局部坐标系族$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$。当$U_\alpha\cap U_\beta\neq\phi$时，$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$: $\varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\to R^n$是保持定向的，也就是说$(\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1})_*$把$R^n$的通常定向映为通常定向。或者说，$\varphi_\alpha\circ\varphi_\beta^{-1}$的Jacobi行列式处处大于零。

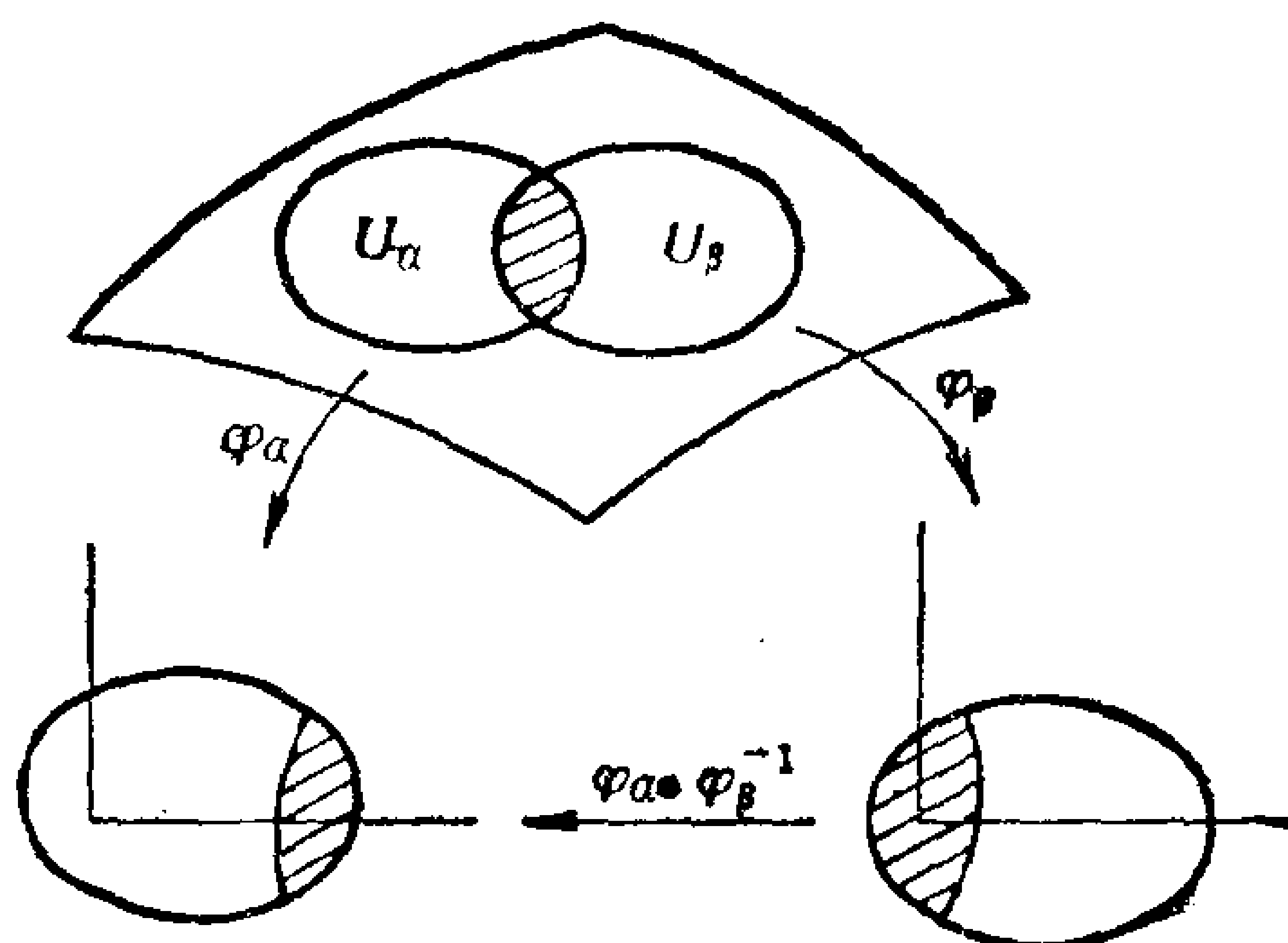


图 3.8

当M是可定向的，在定义中所选择的坐标系下，$x\in U_\alpha \cap U_\beta$，则$M_x$在$U_\alpha$中的自然定向是$\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]$，而在$U_\beta$中的自然定向是$\left[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right]$，由定义$\left[\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right]=\left[\frac{\partial}{\partial y^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial y^n}\right]$。

定义 3　若$a\in U_\alpha$，取$\mu_a=\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_a,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_a\right]$是自然定向。$b\in U_\beta$，取$\mu_b=\left[\left(\frac{\partial}{\partial y^1}\right)_b,\cdots,\left(\frac{\partial}{\partial y^n}\right)_b\right]$也是自然定向。它们分别在$\varphi_\alpha$，$\varphi_\beta$之下都与$R^n$中的通常定向一致。而且当$a=b$时，它们确定相同的定向。这时称$\mu_a$与$\mu_b$是相容的。

定义 4　对于可定向流形，给定一种彼此相容的定向后，则称为定向流形。

不可定向的流形的一个典型例子是 Möbius 带，对于其上任一点P处的一组标架，使它保持相容，沿带向右旋转一圈再回到原处时，则得到相反的定向，这说明 Möbius 带是不可定向的。利用拓扑方法，把两个 Möbius 带沿边缘粘合起来，得到Klein 瓶，是不可定向的微分流形的又一典型例子。

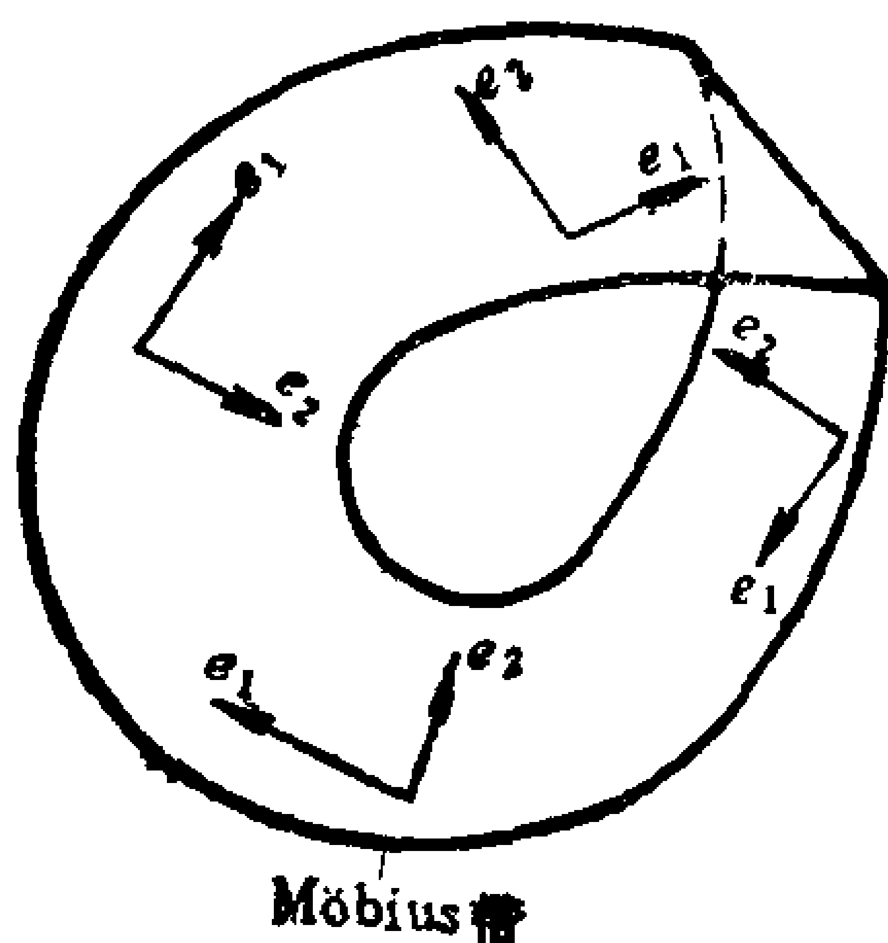


图 3.4

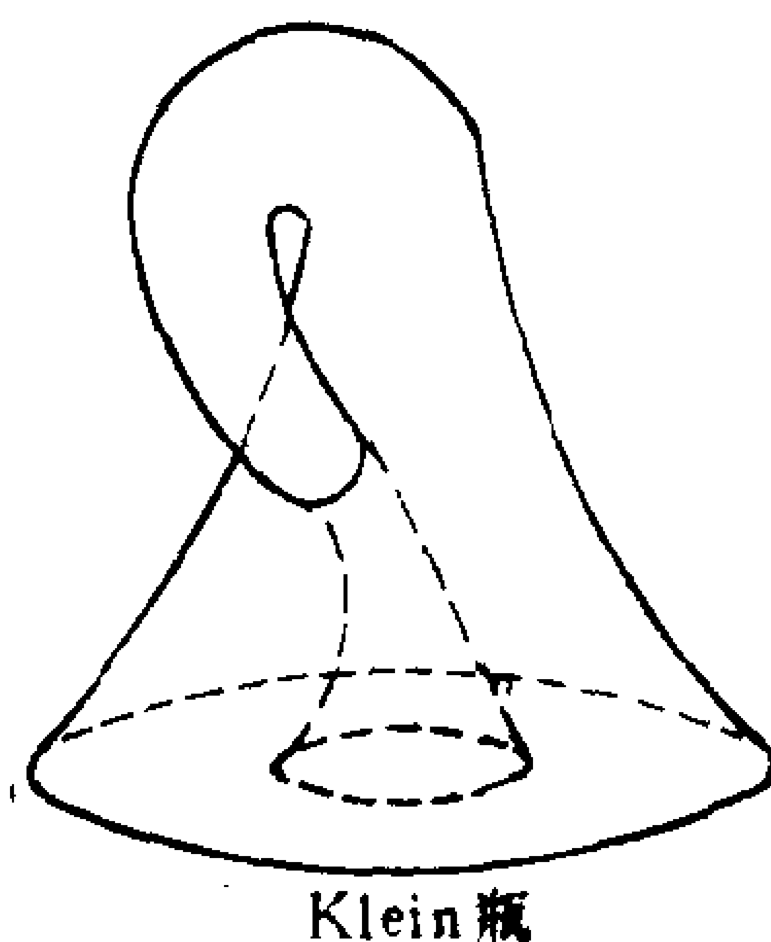


图 3.5

定理 2 设M为定向的n—黎曼流形，黎曼度量为Φ，标准正交标架场为$\{e_1, \cdots, e_n\}$，则存在唯一的1—形式Ω，使得$\Omega(e_1, \cdots, e_n)=1$。

证明：关于黎曼流形的概念，参看§6.2.有了黎曼度量，则在每一点$P\in M$，切空间M_P的标准正交基是存在的，设为$\{(e_1)_P, \cdots, (e_n)_P\}$。由于$M$是定向的，在$M_P$中又有黎曼度量导出的内积，所以存在唯一的$\Omega_P\in\Lambda^n(M_P)$。使得$\Omega_P((e_1)_P, \cdots, (e_n)_P)=1$。

由逐点定义而得到M上的Ω，只须证明在M上是C^∞的即可。设(U, φ)是包含P点的局部坐标系。P点处的坐标标架是

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_P, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_P\right\}$$

假设

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P = \sum_{k=1}^{n} \alpha_i^k (e_k)_P, \quad i=1, 2, \cdots, n$$

再设 $g_{ij}(P)=\Phi_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P, \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_P\right)$，由于$\Phi$是张量场，所以$g_{ij}$是$C^\infty$函数。

$$g_{ij}(P)=\Phi_P\left(\sum_k \alpha_i^k (e_k)_P, \quad \sum_l \alpha_j^l (e_l)_P\right).$$

$$= \sum_{k,\ l} a_i^k a_j^l \Phi_P((e_k)_P,\ (e_l)_P)$$

$$= \sum_{k,\ l} a_i^k a_j^l \delta_{kl} = \sum_k a_i^k a_j^k,\quad 1 \leqslant i,\ j \leqslant n$$

设 $A=(a_i^k)$，则$(g_{ij}(P))=A\cdot A'$. 另一方面

$$\Omega_P\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_P, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_P\right)$$
$$= \det(a_i^k)\Omega_P((e_1)_P, \cdots, (e^n)_P)$$
$$= \det A$$
$$= (\det(g_{ij}(P)))^{1/2}$$

这显然是P的 C^∞函数。既然Ω对每个坐标域 U 都是C^∞的。Ω在M上是 C^∞的 n 一形式。 ‖

这样的Ω称为定向黎曼流形的体积元素，它的局部坐标表示为

$$\Omega = \sqrt{g}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$$

其中 $\sqrt{g(P)} = (\det(g_{ij}(P)))^{1/2}$

4. 带边缘流形和它的定向

设 $H^n = \{x = (x^1, \cdots, x^n) \in R^n;\ X^n \geqslant 0\}$. H^n 称为欧氏半空间. 用 ∂H^n 表示 H^n的边缘，显然 $\partial H^n = \{x \in H^n;\ x^n = 0\}$. H^n中的拓扑是它在 R^n 中的相对拓扑。

定义 5 带有可数拓扑基的Hausdorff拓扑空间M，如果有微分构造$\mathscr{U} = \{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\}$，其中$U_\alpha$是$M$的开集，$\varphi_\alpha$: $U_\alpha \to W \subseteq H^n$是同胚，且$W$是$H^n$中的开集。还满足：

（1）$\{U_\alpha\}$覆盖M；

（2）当$U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi$时，$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$与$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$是$\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$与$\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$之间的$C^\infty$微分同胚；

（3）$\mathscr{U}$是满足性质（1）、（2）的极大集。

则M称为C^∞的带边缘流形。

在所有坐标映射下与∂H^n中的点相对应的点的集合称为M

的边缘，记成 ∂M。

由于 ∂H^n 同构于 R^{n-1}，容易验证 ∂M 构成 $n-1$ 维流形，$M-\partial M$ 就是一般的 n-流形。当 M 的边缘是空集即 $\partial M=\phi$ 时，M 称为无边缘流形，也就是一般流形。在这个意义上，前面讲到的一般微分流形可以看成是带边缘流形的特殊情况。

下面研究带边缘流形的定向问题。

设 M 为带边缘流形，由于 $M-\partial M$ 就是一般流形，它的定向问题已经解决，只要再考虑边缘 ∂M 上的定向就够了。

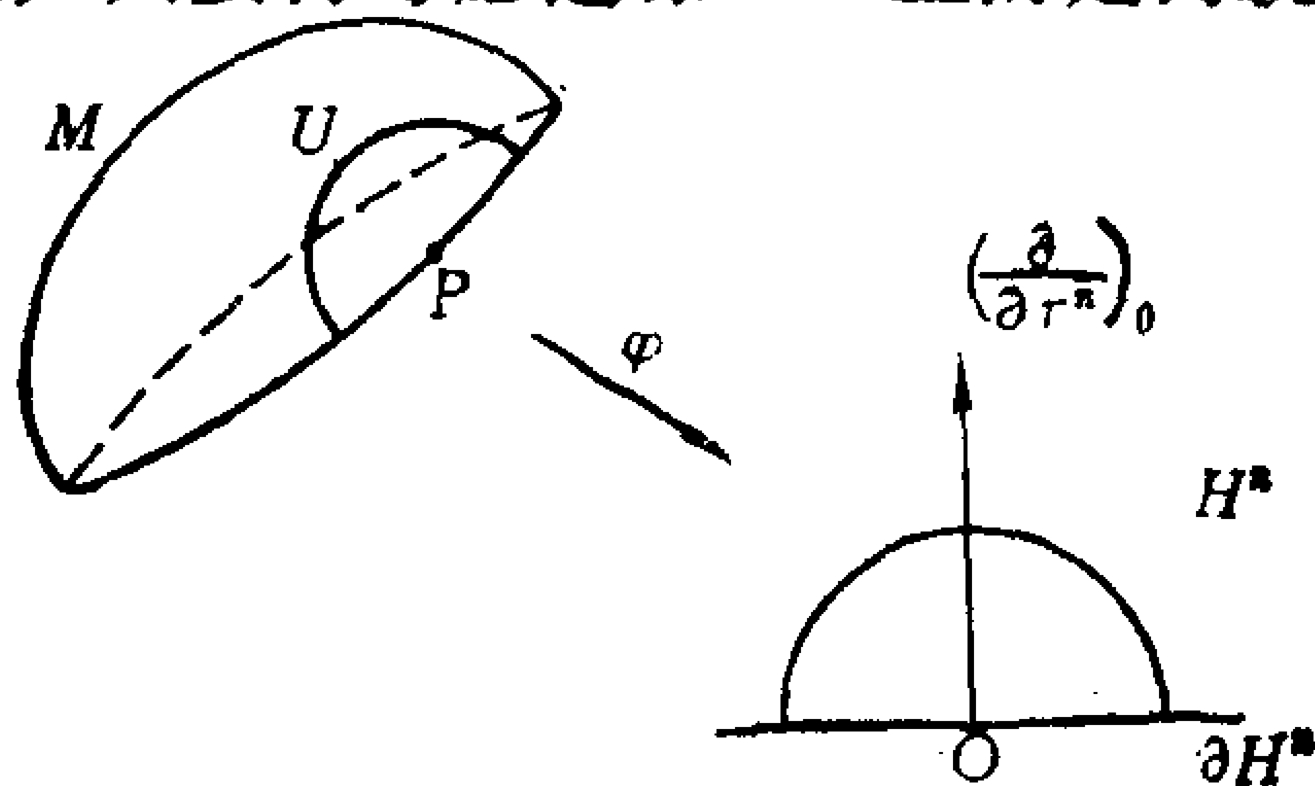


图 3.6

设 $P\in\partial M$，(U, φ) 是 P 点处的局部坐标系，而且使 $\varphi(P)=0$。可以定义

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P=(\varphi^{-1})_*\left(\frac{\partial}{\partial r^i}\right)_0, i=1,\cdots,n$$

我们仍把以 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P;\ i=1,\cdots,n\right\}$ 为基的向量空间看成 M 在 P 点处的切空间，记为 T_PM 或 M_P，显然以 $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P;\ i=1,\cdots,n-1\right\}$ 为基构成 ∂M 在 P 点处的切空间 $T_P(\partial M)$。因此，当 $M-\partial M$ 是可定向的，我们就可以把 $M-\partial M$ 中的定向直接推广到 ∂M 上，从而得到 ∂M 上的定向。但是，由于 M 的边缘 ∂M 是 $n-1$ 维流形，那么 M 上的定向在 ∂M 上是否诱导出一个相容的定向呢？

定义 6 对于 M 的边缘 ∂M 上的任一点 P，设 $X_P\in M_P$，是 P 点的切向量，而且在 $\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_P$ 上的分量为正，则 X_P 称为内指向量。否则称为外指向量。

定义 7 设 μ 是M的一个定向，P是M的边缘上一点。任选一外指向量 $n(P)$，再选 $n-1$ 个向量 $v_1, \cdots, v_{n-1} \in T_P(\partial M)$，使得 $\mu_P = [n(P), v_1, \cdots, v_{n-1}]$，则称

$$(\partial\mu)_P = [v_1, \cdots, v_{n-1}]$$

为M的定向 μ 在边缘 ∂M 上的诱导定向。

为了说明诱导定向的定义是合理的，需要说明以下几点：

(1) 上述的 $v_1, \cdots, v_{n-1}$是存在的。

如果在 $T_P(\partial M)$ 中任选 $n-1$ 个线性无关的向量 $v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}$，总有$[n(P), v_1, \cdots, v_{n-1}] = \pm\mu_P$。如果正号成立，则 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 就是所求，如果负号成立，只需在 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 中任意调换两个向量的顺序即可。

(2) 定义与 $n(P)$ 及 $v_1, \cdots, v_{n-1}$的选择无关。

假设还有 $\mu_P = [n'(P), w_1, \cdots, w_{n-1}]$，则在$M$中

$$\begin{aligned}\mu_P &= [n(P), v_1, \cdots, v_{n-1}] \\ &= [n'(P), w_1, \cdots, w_{n-1}] \\ &= [n(P), w_1, \cdots, w_{n-1}]\end{aligned}$$

显然，在 $T_P(\partial M)$ 中，$[v_1, \cdots, v_{n-1}] = [w_1, \cdots, w_{n-1}]$。

(3) 容易验证，这样在 ∂M 中诱导的定向是相容的。

例 1 R^2 的上半平面 H^2，以X轴为边缘。

设 $\mu_P = [e_1, e_2]$是右手系，则

$\mu_P = [n(P), e_1]$。所以，在边缘上的诱导定向为

$$(\partial\mu)_P = [e_1]$$

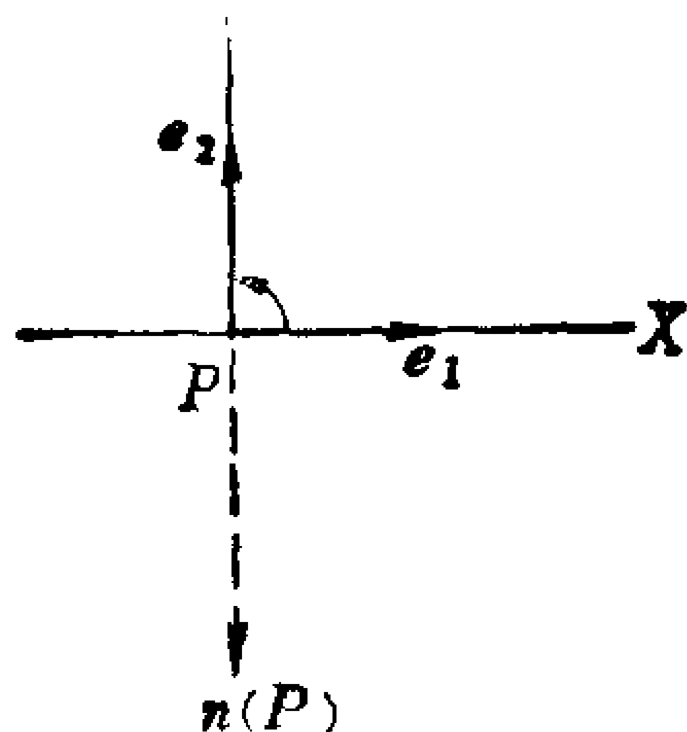


图 3.7

记成$[e_1]=[e_1, e_2]$或 $(\partial\mu)_P=\mu_P$。

例 2 R^3 的上半空间 H^3，以 XY 坐标面为边缘。

设 $\mu_P=[e_1, e_2, e_3]$是右手系，则

$$\mu_P=[n(P), e_2, e_1]$$

所以在边缘上的诱导定向为

$$(\partial\mu)_P=[e_2, e_1]$$

记成$[e_2, e_1]=-[e_1, e_2, e_3]$或 $(\partial\mu)_P=-\mu_P$。

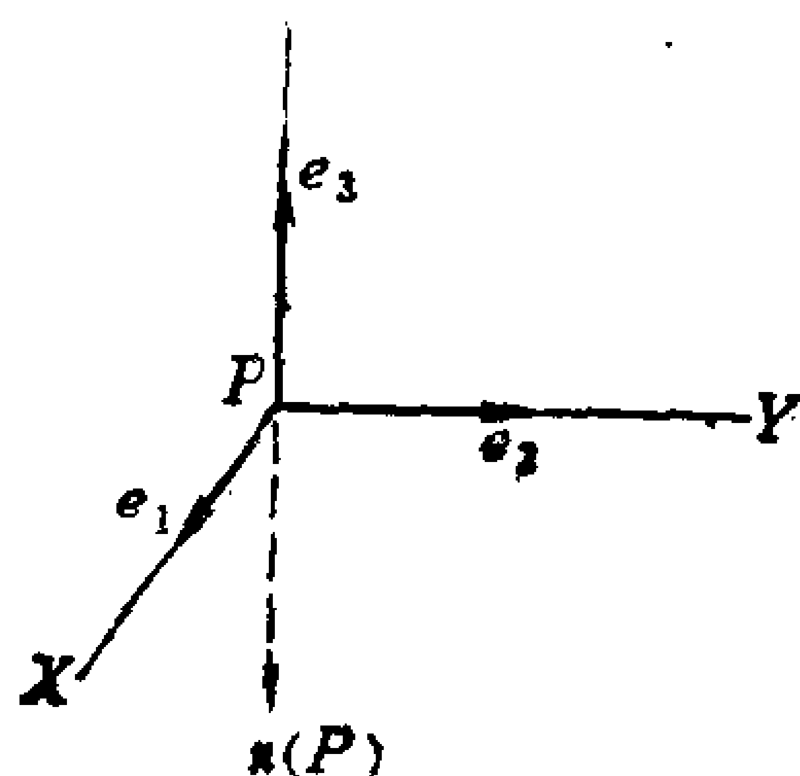


图 3.8

例 3 R^n 的上半空间 H^n。

类似于例 1，例 2，可得 $(\partial\mu)_P=(-1)^n\mu_P$。其中 μ_p 是 H^n中的通常定向。

证明：设 $\mu_P=[e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n]$是右手系，则

$$\mu_P=(-1)^{n-1}[e_n, e_1, \cdots, e_{n-1}]$$
$$=(-1)^n[n(P), e_1, \cdots, e_{n-1}]$$

所以

$$(\partial\mu)_P=(-1)^n[e_1, \cdots, e_{n-1}]$$
$$=(-1)^n[e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n]$$
$$=(-1)^n\mu_P$$

这说明 H^n 在其边缘 ∂H^n 上的诱导定向与原定向限制到 ∂H^n 上的定向差 $(-1)^n$倍。这种定义的好处，将会在流形上的积分中看到。

5. Sard 定理

在第一章1.3.1中，我们介绍了零测集的概念：R^n 中一个子集 $C\subset R^n$ 是零测集，是指对每个 $\varepsilon>0$，存在一个立方体的列 $W_i\subset R^n$，$i=1, 2, \cdots$，使 $C\subset \sum_{i=1}^{\infty} W_i$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} |W_i|<\varepsilon$。其中$|W|$表示立方体的体积。显然零测集的可数并仍是零测集。

引理 1 令$U\subset R^n$是开的，$C\subset U$是零测集，令 $f: U\to R^n$ 是可微的，则 $f(C)$ 是 R^n 中的零测集。

证明：由于U是紧致球列的并，我们可以假设C含于某个紧致球内，并且覆盖C的立方体包含在一个更大的球$K\subset U$内。由中值定理

$$f(x+h)=f(x)+R(x,\ h)$$

$$|R(x,\ h)|\leqslant c|h|$$

其中x，$x+h\in K$，c为常数。因此，如果立方体$W\subset K$有边长a，而且x，$x+h\in W$，则

$$|x+h-x|\leqslant\sqrt{n}\,a$$

即$|h|\leqslant\sqrt{n}\,a$。因此

$$|f(x+h)-f(x)|\leqslant c\sqrt{n}\,a$$

这样，$f(W)$在体积为$(2\sqrt{n}\,c)^n|W|$的立方体内。当$W\to 0$时，$(2\sqrt{n}\,c)^n|W|\to 0$。这就证明了引理。‖

引理 2 令$R_t^{n-1}=\{x\in R^n;\ x^n=t\}$，$C\subset R^n$是紧致的。对所有的$t\in R$，$C_t=C\cap R_t^{n-1}$在$R_t^{n-1}\cong R^{n-1}$内是零测集，则$C$在$R^n$中也是零测集。

为了证明引理2，先看一个命题。

命题 区间$[0,\ 1]$的由子区间构成的开覆盖包含一个有限覆盖$[0,\ 1]=\bigcup\limits_{j=1}^{k}I_j$，且$\sum\limits_{j=1}^{k}|I_j|\leqslant 2$。

证明：选择开覆盖的一个有限子覆盖，使得从它不能再去掉任何区间。则$[0,\ 1]$的每一点至多只能在两个区间内。因为，如果某点在三个区间内，则这三个区间中必有一个最小端点和最大端点。不以此二点为端点的第三个区间将是多余的。显然，这样的有限覆盖就满足命题中的要求。‖

引理2的证明：令$C\subset R^{n-1}\times[0,\ 1]$，$C_t$在$R^{n-1}\times t$中是零测集。对于任意的$\varepsilon>0$，在每个$R_t^{n-1}$中可找到$C_t$的开立方体覆盖$W_t^i$，使体积和小于$\varepsilon$。令$W_t$是$\bigcup\limits_i W_t^i\subset R_t^{n-1}$到$R^{n-1}\times$

$[0, 1]$的第一个因子R^{n-1}上的投影。当固定t时，函数$|x^n-t|$在C_t上为0。又因为C是紧致的，所以$|x^n-t|$在$W_t\times[0, 1]$之外，在C上有正的下确界α.这样

$$\{x\in C:|x^n-t|<\alpha\}\subset W_t\times I_t$$

其中$I_t=(t-\alpha, t+\alpha)$。根据命题，可找到有限个I_{tj}，$j=1, \cdots, k$，使体积和$\leqslant 2$。显然

$$\{W^i_{tj}\times I_{tj}, \quad j=1, \cdots, k, \quad i\in N\}$$

覆盖C且体积和$<2\varepsilon$。这就证明了引理。‖

引理中，C为紧致的假设可减弱为C是紧致集的可数并。

在以上准备之后，我们可以证明一个重要的结论。

定理1 (Sard) 令$U\subset R^n$是开集，$f:U\to R^m$是可微映射，$D=\{x\in U:(df)_x退化\}$称为f的临界点集，则$f(D)\subset R^m$是零测集。

证明：对n用归纳法：当$n=0$时，R^n是一个点。$f(U)$也是一个点。这时定理成立。

假设定理对$n-1$时成立，现证明n的情形。

令$D_i=\{x\in U:f$在x点$\leqslant i$阶偏导数为零$\}$，则得闭集列

$$D\supset D_1\supset D_2\supset\cdots$$

我们欲证：

(a) $f(D-D_1)$是零测集；

(b) $f(D_i-D_{i+1})$是零测集；

(c) $f(D_k)$是零测集，当k充分大。

注意其中所有的集都可应用引理2，而且只要对于$\forall x\in D-D_1$，存在一个邻域V，使$f(V\cap(D-D_1))$是零测集，同时$D-D_1$被可数个邻域覆盖，就能证明(a)了。

(a) 当$m=1$时，$D=D_1$，所以考虑$m\geqslant 2$。

令$x\in D-D_1$，由于$x\notin D_1$，所以可设

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(x)\neq 0$$

这时映射

$$h: U \to R^n: (x^1, \cdots, x^n) \mapsto (f_1(x), x^2, \cdots, x^n)$$

在 x 点非退化。因此，有 x 的邻域 V，使（V，h）可做为坐标卡。在此坐标卡之下，f 变成 $g = f \cdot h^{-1}$。

$$g: (z^1, \cdots z^n) \mapsto (z^1, g_2(z), \cdots, g_m(z))。$$

令 g' 是 g 的限制

$$g': (t \times R^{n-1}) \cap h(V) \to t \times R^{m-1}$$

g 的 Jacobi 行列式 $\quad Dg = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ * & Dg' \end{vmatrix}$

所以，$\{g$ 的临界点集$\} = \{g'$ 的临界点集，对所有可能的 $t\}$。由归纳假设：g' 的临界值集在 $t \times R^{m-1}$ 中是零测集。再由引理 2，g 的临界值集在 R^m 中是零测集。

（b）证明方法与（a）类似。

（c）令 $W \subset U$ 是边长为 a 的立方体，$k > \left(\frac{n}{m}\right) - 1$。

我们将证明 $f(W \cap D_k)$ 是零测集。由于 U 是立方体的可数并，这就证明了（c）。由Taylor 公式

$$f(x+h) = f(x) + R(x, h)$$
$$|R(x, h)| \leqslant c|h|^{k+1}$$

其中 $x \in D_k \cap W$，$x + h \in W$，c 对于 f 和 W 是常数。

分解 W 为 r^n 个边长为 $\frac{a}{r}$ 的立方体。如果 W_1 是其中包含 $x \in D_k$ 的一个立方体，则 W_1 的每一点可写成 $x + h$，并有 $|h| \leqslant \frac{\sqrt{n}\, a}{r}$。则 $f(W_1)$ 在边长为

$$2c \frac{(\sqrt{n}\, a)^{k+1}}{r^{k+1}} = \frac{b}{r^{k+1}}$$

的立方体内，其中 b 为常数，只依赖于 W 和 f 而不依赖于分解。所有这些立方体的总体积

$$s \leqslant r^n\left(\frac{b}{r^{k+1}}\right)^m$$

当 $m(k+1)>n$ 时，$s\to 0$（当 $r\to\infty$）。因此，只要适当选择分解，就可使 s 任意小，这已证明了(c)。

综合(a)、(b)、(c)，不难得到 $f(D)$ 是零测集的结论。‖

如果有了本节后面的知识，便可把 Sard 定理推广到流形上。

推论 1 流形到流形的光滑映射的临界值之集是零测集.

此外还有

推论 2 流形到流形的光滑映射的正规值之集是稠密集（如果非空）。

6．流形上的奇异立方体

定义 1 设 M 为 n 维微分流形，C：$[0, 1]^k\to M$，$k\leqslant n$，为非退化的 C^∞ 映射，则称 C 或者 $C([0, 1]^k)$ 为 M 上的一个 k 维奇异立方体。

显然，0 维奇异立方体 C：$[0, 1]^0\to M$ 是 M 中一点；1 维奇异立方体 C：$[0, 1]^1\to M$ 是 M 中一段曲线。下面研究一个重要的特例：

$$I^n: [0, 1]^n\to R^n$$

使每一点 $x\in[0, 1]$ 映到自身，即 $I^n(x)=x$。我们称 I^n 为 R^n 中的标准 n 维立方体。

定义 2 两个 $n-1$ 维奇异立方体

$$I^n_{(i,0)}: [0, 1]^{n-1}\to R^n$$

使得

$$\begin{aligned} &I^n_{(i,0)}(x^1, \cdots, x^{n-1})\\ &=I^n(x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^i, \cdots, x^{n-1})\\ &=(x^1, \cdots, x^{i-1}, 0, x^i, \cdots, x^{n-1}) \end{aligned}$$

$$I^n_{(i,1)}: [0, 1]^{n-1}\to R^n$$

使得

$$I^n_{(i,1)}(x^1, \cdots, x^{n-1})$$
$$=I^n(x^1, \cdots x^{i-1}, 1, x^i, \cdots, x^{n-1})$$
$$=(x^1, \cdots, x^{i-1}, 1, x^i, \cdots x^{n-1})$$

分别称为标准 n 维立方体 I^n 的（i，0）面和（i，1）面。I^n 的边界定义为

$$\partial I^n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} I^n_{(i,\alpha)}$$

如果 C：$[0, 1]^k \to M$ 是 M 上的 k 维奇异立方体，很自然地，可以定义它的（i，α）面为

$$C_{(i,\alpha)} = C \circ I^k_{(i,\alpha)}, \quad \alpha = 0, 1$$

C 的边界定义为

$$\partial C = \sum_{i=1}^{k} \sum_{\alpha=0,1} (-1)^{i+\alpha} C_{(i,\alpha)}$$

定义 3 M 中 k 维奇异立方体的整数倍之和，称为 M 中的 k 维链，记成 $\sum_i a_i C_i$，其中 a_i 为整数。并且规定 k 维链的边界是

$$\partial\left(\sum_i a_i C_i\right) = \sum_i a_i \partial C_i$$

定理 2 若 C 是 M 上的一个 n 维链，则 $\partial(\partial C) = 0$，即 $\partial^2 = 0$（这时 ∂ 称为边界算子）。

证明：设 $i \leqslant j$.

$$(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}(x) = I^n_{(i,\alpha)}(I^{n-1}_{(j,\beta)}(x))$$
$$=I^n_{(i,\alpha)}(x^1, \cdots, x^{j-1}, \beta, x^j, \cdots, x^{n-2})$$
$$=I^n(x^1, \cdots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \cdots, x^{j-1}, \beta, x^j, \cdots, x^{n-2})$$
$$(I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}(x) = I^n_{(j+1,\beta)}(I^{n-1}_{(i,\alpha)}(x))$$
$$=I^n_{(j+1,\beta)}(x^1, \cdots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \cdots, x^{n-2})$$
$$=I^n(x^1, \cdots, x^{i-1}, \alpha, x^i, \cdots, x^{j-1}, \beta, x^j, \cdots, x^{n-2})$$

所以当 $i \leqslant j$ 时，$(I^n_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)} = (I^n_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$。显然对于 M 上的 n

维奇异立方体C，有

$$(C_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}=(C_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)},\quad i\leqslant j$$

因此

$$\partial(\partial C)=\partial\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}(-1)^{i+\alpha}C_{(i,\alpha)}\right)$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\alpha=0,1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{\beta=0,1}(-1)^{i+\alpha+j+\beta}(C_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$$

其中 $(C_{(i,\alpha)})_{(j,\beta)}$与 $(C_{(j+1,\beta)})_{(i,\alpha)}$ 恰好带有相反的符号，所以 $\partial(\partial C)=0$．对于n维链$\sum_{i}a_iC_i$，此性质显然也成立。‖

如果M是定向的n－流形，某局部坐标系（U，φ）是保持定向的，即在φ之下U上的定向对应于$\varphi(U)\subset R^n$中的通常定义。当M中的一个n维奇异立方体C：$[0,1]^n\to M$使得$C(x)=\varphi^{-1}(x)$，且$C([0,1]^n)\subset U$，则称C为M上保持定向的n维奇异立方体。今后我们将主要研究这种立方体。

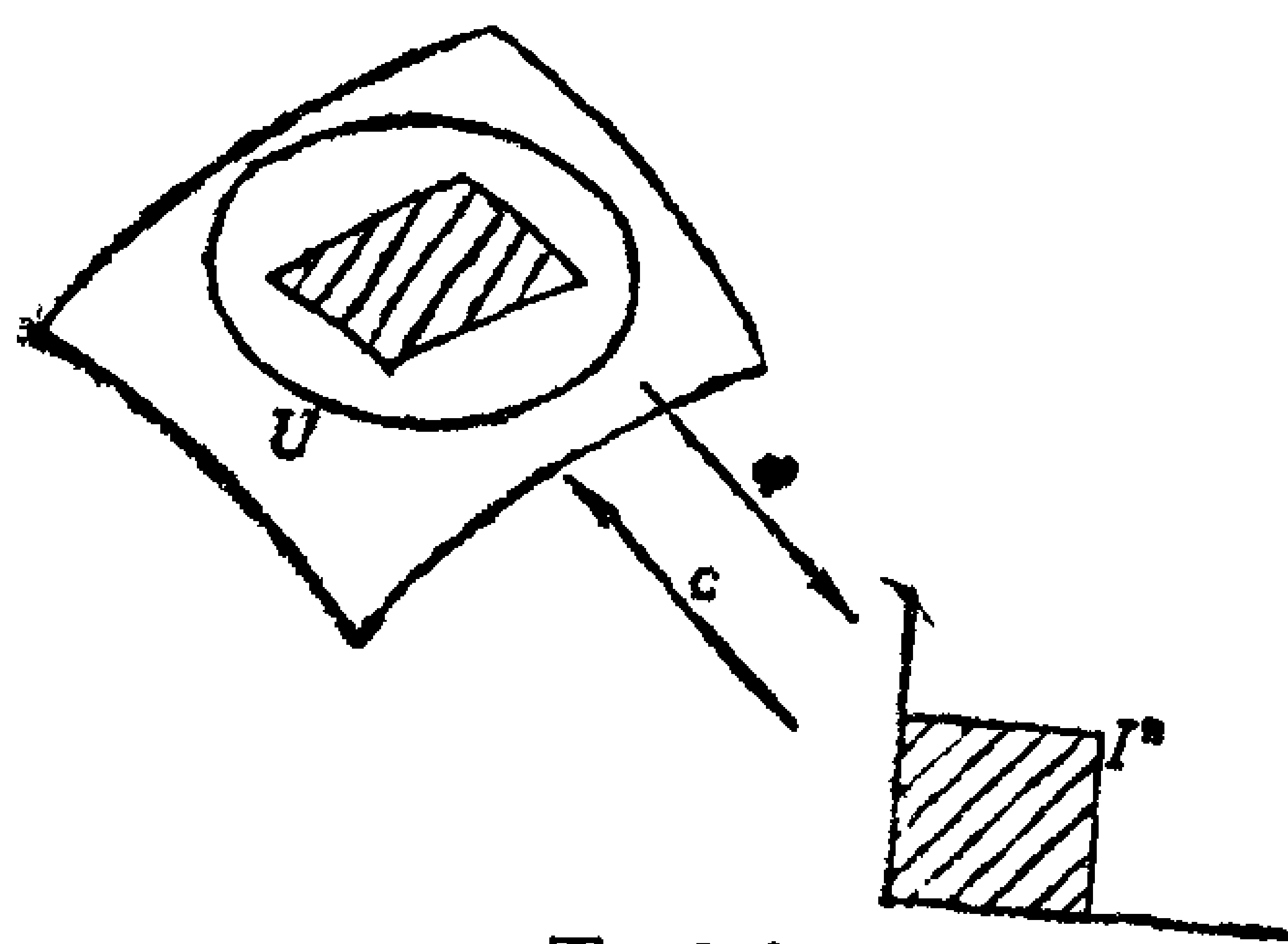


图 3.9

7．流形上形式的积分

类似于零测集的概念，还有R^n上零容度集的概念．设$C\subset R^n$是一子集，如果对于$\forall\varepsilon>0$，都有有限个n维闭立方体W_1，

$\cdots$, W_s 使 $C\subset\bigcup_{i=1}^{s}W_i$ 和 $\sum_{i=1}^{s}|W_i|<\varepsilon$，则称$C$为$R^n$中的零容度集，或说$C$有容度零。零容度集与零测度集并不等价，容易看出，零容度集一定是零测度集，但反之不然。例如直线R中的有理点集是零测度集而非零容度集。如果C是紧致的，而且是零测度集，则它也一定是零容度集。如果$C=\bigcup_{i=1}^{\infty}C_i$，所有的$C_i$都是零容度集，则$C$是零测度集。

对于C^∞的流形M上的点集A，如果 $A=\bigcup_{i=1}^{s}A_i$，其中每个A_i包含在M的某个坐标域U_i之中，而且 $\varphi_i(A_i)$ 在R^n中是零容度集，则称$A\subset M$是M中的零容度集。如果$D\subset M$是M的紧致子集，而且其边界∂D是M的零容度集，则称D为M的积分区域。

M上的函数f：$M\to R$，如果其不连续点集$B\subset M$是M的零容度集，则称f在M上几乎处处连续。如果

$$V=\mathrm{Supp}\,f=\overline{\{x\in M: f(x)\neq 0\}}$$

是紧致的，则称f在M上有紧致支集，并说f的紧致支集是$V=\mathrm{Supp}\,f$。如果函数f在M上有界，有紧致支集，几乎处处连续，则称f在M上是可积的。

如果Ω是M上的某个C^∞的n－形式，f是M上的可积函数，则$\omega=f\Omega$称为M上的可积形式。

定义 4 设（U，φ）是定向流形M的某个局部坐标系，$C\subset U\subset M$是保持定向的n维奇异方体，$\varphi(C)=I^n$。ω为M上的可积的n－形式，且$\mathrm{Supp}\omega\subset C$，则定义

$$\int_M\omega=\int_C\omega=\int_{I^n}(\varphi^{-1})^*\omega$$

$$=\int_{I^n}f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\underbrace{\int_0^1\cdots\int_0^1}_{n\text{个}} f(x)dx^1\cdots dx^n$$

其中$f(x)$是$\varphi(C)=I^n$上的某个相应的函数。

这里需要说明的是积分值与坐标域U和立方体C的选择无关。假设$C'\subset U'$是另一个立方体和坐标域，也使$\mathrm{Supp}\omega\subset C'$，$\varphi'(C')=I^n$。其坐标由$y^1$，…，$y^n$表示。则

$$(\varphi'^{-1})^*\omega=f'(y)dy^1\wedge\cdots\wedge dy^n$$

下面证明

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x)dx^1\cdots dx^n$$

$$=\int_0^1\cdots\int_0^1 f'(y)dy^1\cdots dy^n$$

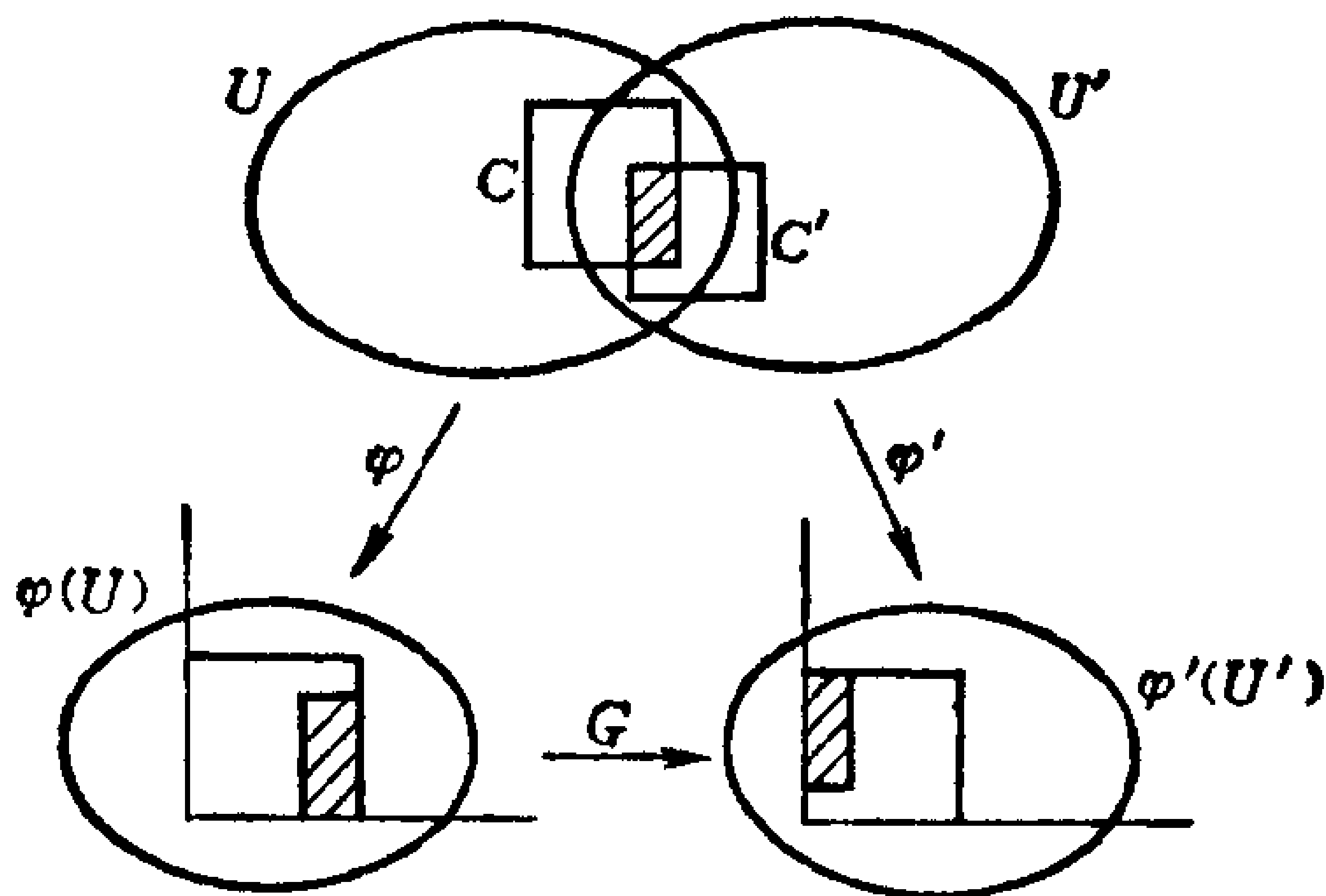


图 3.10

证明：由于$\mathrm{Supp}\omega\subset C\cap C'\subset U\cap U'$，设$\varphi(C\cap C')=D\subset I^n$，$\varphi'(C\cap C')=D'\subset I^n$，则

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x)dx^1\cdots dx^n=\int_{I^n}f=\int_D f$$

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f'(y)dy^1\cdots dy^n=\int_{I^n}f'=\int_{D'}f'$$

令$G=\varphi'\circ\varphi^{-1}:\varphi(U\cap U')\to\varphi'(U\cap U')$，$\Delta G$是$G$的Jacobi行列式，由于$M$是定向的，所以$\Delta G>0$。又由于$G(D)=D'$，根

据 R^n 中积分的变量替换公式

$$\int_{D'} f' = \int_D f'(G(x))\Delta G dx^1 \cdots dx^n$$
$$= \int_D f' \circ G \cdot \Delta G$$

再根据 n 一形式 ω 在不同的局部坐标系下的表示，我们有

$$f(x) = f'(G(x)) \cdot \Delta G$$

所以

$$\int_D f = \int_{D'} f' \quad \|$$

下面给出形式的积分的一般定义。

定义 5 设M是紧致的、定向的、C^∞的 n 一流形，U_1，…，U_m 是M的一个坐标覆盖，g_1，…，g_m 是相应的单位分解，ω 是M上可积的 n 一形式。则定义ω在M上的积分为

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{m} \int_{U_i} g_i \omega$$

命题 上述积分定义与覆盖和单位分解的选择无关。

证明：设 V_1，…，V_k 是M的另一个坐标邻域覆盖，f_1，…，f_k 是相应的单位分解。我们必须证明

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{U_i} g_i \omega = \sum_{j=1}^{k} \int_{V_j} f_j \omega$$

为此，我们做

$$U_1 \cap V_1,\ \cdots,\ U_i \cap V_j,\ \cdots,\ U_m \cap V_k$$

这也构成M的一个坐标邻域的覆盖。而且

$$g_1 f_1,\ \cdots,\ g_i f_j,\ \cdots,\ g_m f_k$$

就是相应的单位分解。因为 $g_i f_j$ 在 $U_i \cap U_j$ 之外为 0，而且对每个 $P \in M$，有

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} g_i(P) f_j(P)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} g_i(P) \cdot \sum_{j=1}^{k} f_j(P) = 1$$

因此

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{U_i} g_i\omega = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k} \int_{U_i \cap U_j} g_i f_j \omega$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{V_j} f_j \omega \left(\sum_{i=1}^{m} g_i \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \int_{V_j} f_j \omega \ \|$$

定理 8 定向流形上 n 一形式的积分有下面的性质：

（1）如果用 $-M$ 表示与 M 有相反定向的流形，则

$$\int_{-M} \omega = -\int_M \omega$$

（2）如果 a，$b \in R$，则

$$\int_M (a\omega_1 + b\omega_2) = a\int_M \omega_1 + b\int_M \omega_2$$

（3）如果 $\omega = g\Omega$，$g \geqslant 0$，Ω 是给出 M 定向的处处不为零的 n-形式，则

$$\int_M g\Omega \geqslant 0$$

同时当且仅当 $g \equiv 0$ 时，等号成立；

（4）如果 F：$M_1 \to M_2$ 是微分同胚，且保持定向，ω 是 M_2 上的可积形式，则

$$\int_{M_1} F^*\omega = \int_{M_2} \omega$$

证明：由积分定义，积分可在每个局部坐标域内分别进行，因此只要证明 $\mathrm{Supp}\omega \subset C \subset U$ 的情形就够了。设 (U, φ) 为局部坐标系，以 x^1，…，x^n 为坐标。

$$(\varphi^{-1})^*\omega = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \varphi(C) = I^n$$

$$\int_M \omega=\int_C \omega=\int_{I^n} f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

（1）在积分中改变M的定向就相当于把坐标映射 φ变成φ'，使 $(\varphi'^{-1})^*\omega=-f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$，因此积分改变符号。

（2）$\int_M (a\omega_1+b\omega_2)$

$$=\int_{I^n}(af_1+bf_2)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=a\int_{I^n}f_1dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n+b\int_{I^n}f_2dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=a\int_M\omega_1+b\int_M\omega_2$$

（3）设在局部坐标系下，$(\varphi^{-1})^*\omega=P(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$，由于$\Omega$给定$M$的定向，所以$P(x)>0$。因此

$$\int_M g\omega=\int_{I^n} g\cdot Pdx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\geqslant 0$$

而且显然，当且仅当$g=0$时，等号成立。

（4）设F：$M_1\to M_2$是保持定向的微分同胚。

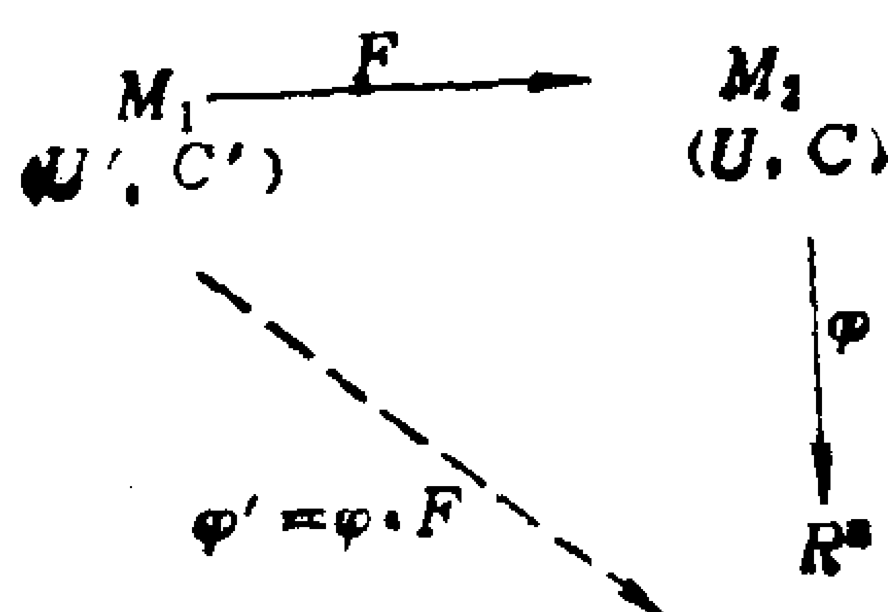


图 3.11

$\mathrm{Supp}\,\omega\subset C\subset U\subset M_2$

$\varphi(C)=I^n$，$F^{-1}(C)=C'$，$F^{-1}(U)=U'$。则

F：$C\to C'$，$U\to U'$都是微分同胚。再设

$$(\varphi^{-1})^*\omega=f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

则

$$\int_{M_2}\omega=\int_{I^n}f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

令 $\varphi'=\varphi\circ F$ 为 M_1 上的局部坐标映射，则有

$$\begin{aligned}&(\varphi'^{-1})^*(F^*\omega)=(\varphi\circ F)^{-1*}(F^*\omega)\\&=(\varphi^{-1})^*\circ(F^{-1})^*\circ F^*(\omega)\\&=(\varphi^{-1})^*\omega\\&=f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\end{aligned}$$

又因 $\varphi'(C')=\varphi\circ F(C')=\varphi(C)=I^n$，所以

$$\int_{M_1}F^*\omega=\int_{I^n}f(x)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n=\int_{M_2}\omega.\ \|$$

8．Stokes 定理

定理 4 （Stokes）M是定向的 C^∞ n-维流形．$D\subset M$ 是积分区域，且 ∂D 上有诱导定向，ω 是D上的 $n-1$ 次微分形式，ω 在 ∂D 上和 $d\omega$ 在D上是可积的，则有

$$\int_D d\omega=\int_{\partial D}\omega$$

证明：设D的坐标邻域覆盖是U_1，…，U_m．相应的单位分解是 g_1，…，g_m．所以

$$\omega=\sum_{\alpha=1}^{m}g_\alpha\cdot\omega$$

因此

$$\int_D d\omega=\int_D d\left(\sum_{\alpha=1}^{m}g_\alpha\omega\right)=\sum_{\alpha=1}^{m}\int_D d(g_\alpha\omega)$$

$$\int_{\partial D}\omega=\int_{\partial D}\sum_{\alpha=1}^{m}g_\alpha\omega=\sum_{\alpha=1}^{m}\int_{\partial D}g_\alpha\omega$$

其中 $\mathrm{Supp}(g_\alpha\omega)\subset C\subset U_\alpha$．因此只需证明

$$\int_{\partial D\cap C}g_\alpha\omega=\int_{D\cap C}d(g_\alpha\omega),$$

就证明了定理．

下面证明：如果（U，φ）是D的一个定向坐标邻域，$C\subset U$是一个奇异立方体，即$\varphi(C)=I^n$。$\mathrm{Supp}\,\omega\subset C$。则有

$$\int_{C\cap D} d\omega=\int_{C\cap\partial D}\omega \qquad (*)$$

在局部坐标（x^1，…，x^n）下，设

$$\omega=a_1 dx^2\wedge\cdots\wedge dx^n-a_2 dx^1\wedge dx^3\wedge\cdots\wedge dx^n$$
$$+\cdots+(-1)^{n-1}a_n dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$$
$$=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}a_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

其中“︿”表示在式子中应该缺的部分。外微分ω，得

$$d\omega=\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

下面分两种情况进行讨论：

（1）$U\cap\partial D=\phi$。

$$\int_{C\cap D}d\omega=\int_C d\omega=\sum_{i=1}^{n}\int_C\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{I^n}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\int_0^1\cdots\left(\int_0^1\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^i\right)dx^1\cdots\hat{dx^i}\cdots dx^n$$

由于$\mathrm{Supp}\,\omega\subset C\subset U$，所以$a_i|_{\partial a}=0$，即

$$a_i(x^1,\ \cdots,\ x^n)|_{x^j=0,1}=0,\qquad i,\ j=1,\ \cdots,\ n$$

$$\therefore\ \int_0^1\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^i=0,\quad i=1,\ \cdots,\ n$$

$$\therefore\ \int_{C\cap D}d\omega=0$$

另一方面，由于$C\cap\partial D=\phi$，所以$\int_{C\cap\partial D}\omega=0$，即（$*$）成立。

（2）$U\cap\partial D\neq\phi$。

设在 $\partial D\cap U$ 上 $x^n=0$，则 $dx^n=0$，且带有诱导定向。这时仍然有

$$a_i(x^1,\cdots,x^n)|_{x^j=0,1}=0,\qquad i=1,\cdots,n,\ j=1,\cdots,n-1$$

及

$$a_i(x^1,\ \cdots,\ x^{n-1},\ 1)=0,\ i=1,\ \cdots,\ n$$

因此

$$\int_{C\cap\partial D}\omega=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\int_{C\cap\partial D}a_i dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=(-1)^{n-1}\int_{C\cap\partial D}a_n dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$$

$$=(-1)^{n-1}\int_{(-1)^nI^{n-1}}a_n(x^1,\ \cdots,\ x^{n-1},\ 0)\times dx^1\wedge\cdots\wedge dx^{n-1}$$

$$=-\int_{I^{n-1}}a_n(x^1,\ \cdots,\ x^{n-1},\ 0)dx^1\cdots dx^{n-1}$$

另一方面

$$\int_{C\cap D}d\omega=\sum_{i=1}^{n}\int_{C\cap D}\frac{\partial a_i}{\partial x^i}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$$

$$=\int_{C\cap D}\frac{\partial a_n}{\partial x^n}dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n\ \text{（其它各项为 0，理由如（1））}$$

$$=\int_{I^{n-1}}\left(\int_0^1\frac{\partial a_n}{\partial x^n}dx^n\right)dx^1\cdots dx^{n-1}$$

$$=\int_{I^{n-1}}[a_n(x^1,\ \cdots,\ x^{n-1},\ 1)-a_n(x^1,\ \cdots,\ x^{n-1},\ 0)]\times dx^1\cdots dx^{n-1}$$

$$=-\int_{I^{n-1}}a_n(x^1,\ \cdots,\ x^{n-1},\ 0)dx^1\cdots dx^{n-1}$$

所以

$$\int_{C\cap D} d\omega = \int_{C\cap\partial D} \omega \qquad \|$$

Stokes 定理揭示了流形论中两个算子 ∂ 与 d 的关系，其中 ∂ 刻划流形的整体性质，d 刻划流形的局部性质。Stokes 定理正是把这二者联系起来，因此是一个非常重要的定理。

下面看几个 Stokes 定理在欧氏空间中的特例。

例 1 设 $D=[a, b]$ 是 R 中的闭区间，具有通常的定向。则其边界上的诱导定向为 $\partial D=\{b\}-\{a\}$。

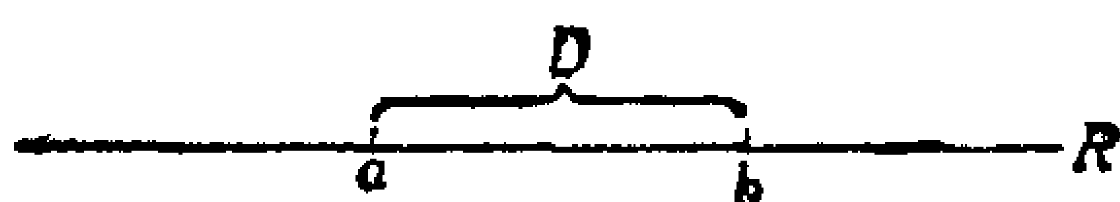


图 3.12

$\omega=f$ 是 R 上的 0-形式，根据 Stokes 定理

$$\int_D df=\int_{\partial D} f = f(b)-f(a)$$

写成通常的形式

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b)-f(a)$$

这就是微积分的基本定理。

例 2 设 D 是 R^2 中的有界单连通区域，其边界 ∂D 是光滑曲线。D 的定向在 ∂D 上的诱导定向如图所示（即沿曲线 ∂D 的定向运动时，区域总在左侧）。$\omega=Pdx+Qdy$ 是 R^2 中的 1-形式，则

$$d\omega=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy$$

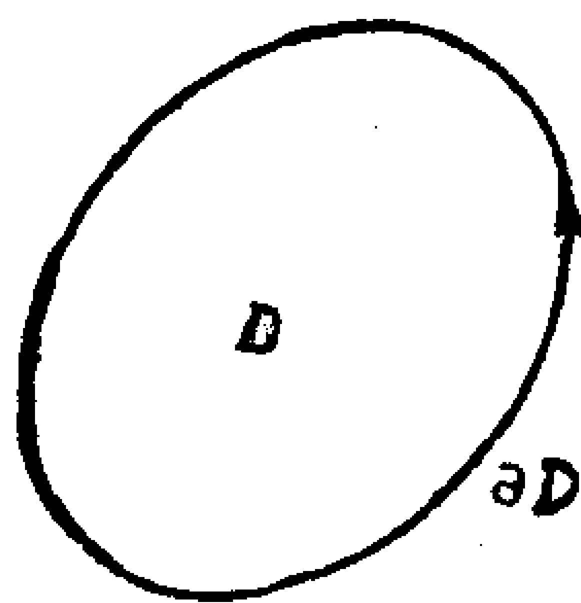


图 3.13

根据 Stokes 定理，有

$$\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\wedge dy = \int_{\partial D} Pdx+Qdy$$

这就是熟知的 Green 定理。

例 3　设D是 R^3 中有界单连通区域，其边界 ∂D 是光滑闭曲面。D的定向在 ∂D 上的诱导定向是外法线方向。

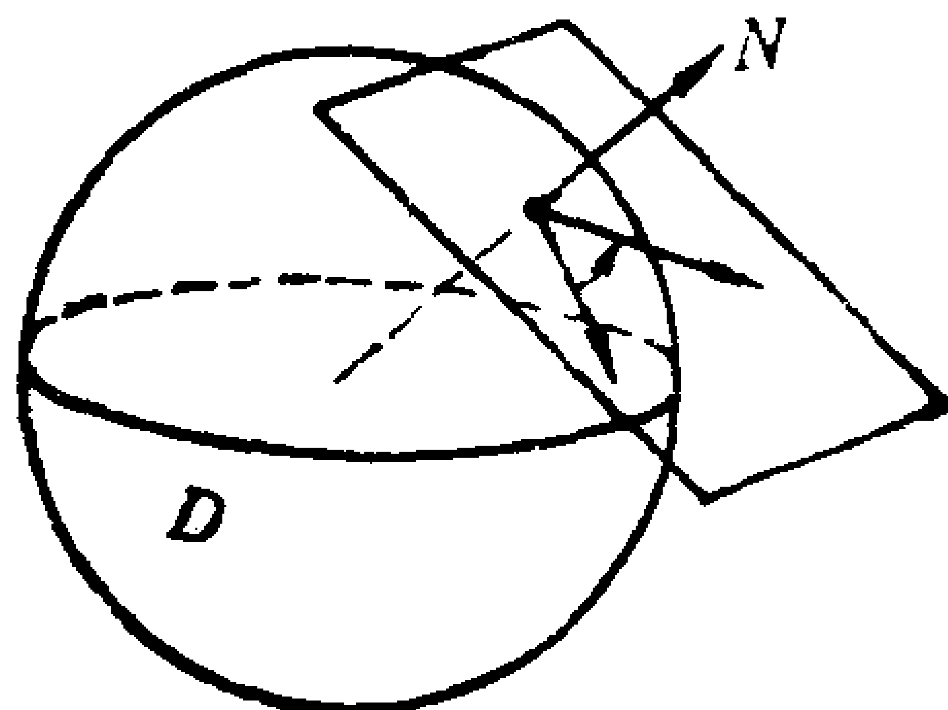


图　3.14

$$\omega = Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$$

是 R^3 中的 2-形式，P、Q、R是可微函数。则

$$d\omega = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

根据 Stokes 定理，有

$$\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)dx\wedge dy\wedge dz$$

$$= \iint_{\partial D} Pdy\wedge dz + Qdz\wedge dx + Rdx\wedge dy$$

这就是通常的散度定理。

由这些例子，我们看到 Stokes 定理是微积分中那些常见的公式的推广，它给出了统一的形式。因此它也称为多元微积分中的基本定理。这个定理在物理、力学、几何学、偏微分方程论中都有极为重要的应用。

第四章　de Rham 定理和 Hodge 定理

§ 4.1　de Rham 定理

1. de Rham 上同调

在第三章里，我们已经研究了微分流形上的微分形式。若M是n维微分流形，则它上面的全体微分形式构成分次的代数称为外形式代数，记成

$$\wedge(M)=\Lambda^0(M)\oplus\Lambda^1(M)\oplus\cdots\oplus\Lambda^n(M)$$

而且其中带有外微分运算

$$d:\ \Lambda^k(M)\to\Lambda^{k+1}(M).$$

定义 1　在序列$\Lambda^{k-1}(M)\xrightarrow{d}\Lambda^k(M)\xrightarrow{d}\Lambda^{k+1}(M)$中

$$Z^k_{dR}(M)=\{\omega\in\Lambda^k(M):d\omega=0\}$$

称为M上的k维 de Rham 上闭链群，

$$B^k_{dR}(M)=\{\omega\in\Lambda^k(M):\exists\eta\in\Lambda^{k-1}(M),\ d\eta=\omega\}$$

称为M上的k维 de Rham 上边缘链群，

$$H^k_{dR}(M)=Z^k_{dR}(M)/B^k_{dR}(M)$$

称为M上的k维 de Rham 上同调群。

显然，当$k>n$时，以上三群均为零，可以考虑

$$H^*_{dR}(M)=\bigoplus_{k=0}^{n}H^k_{dR}(M)$$

其中有$\Lambda(M)$传递给它的分次代数结构，因此称为流形M的 de Rham 上同调代数。

我们看一下其中的乘法运算。在$\Lambda(M)$中外乘有下述性质：

$$d(\omega\wedge\eta)=d\omega\wedge\eta+(-1)^{\deg\omega}\omega\wedge d\eta$$

由此不难看出，当ω、η都是上闭链时，则$\omega\wedge\eta$也是上闭链；当

其中一个是上边缘链，另一个是上闭链时，则$\omega\wedge\eta$是上边缘链.

设ω_1、ω_2是r维上闭链，且$\omega_1-\omega_2=\tau$是上边缘链，则称ω_1与ω_2上同调，或它们属于同一个同调类.这时它们在H^r_{dR}中确定同一个元素，我们记为$\omega_1\sim\omega_2$。若$\eta_1\sim\eta_2$是s维上闭链，$\eta_1-\eta_2=\tau'$，则

$$\begin{aligned}\omega_1\wedge\eta_1&=(\omega_2+\tau)\wedge(\eta_2+\tau')\\&=\omega_2\wedge\eta_2+\omega_2\wedge\tau'+\tau\wedge\eta_2+\tau\wedge\tau'\end{aligned}$$

由于后三项都是上边缘链，所以$\omega_1\wedge\eta_1\sim\omega_2\wedge\eta_2$，即$\omega_1\wedge\eta_1$、$\omega_2\wedge\eta_2$确定同一同调类．若我们用$[\omega]$和$[\eta]$分别表示$\omega_1$、$\omega_2$和$\eta_1$、$\eta_2$所在的类，则自然地

$$[\omega]\wedge[\eta]=[\omega\wedge\eta]$$

这就是上同调代数$H^*_{dR}(M)$中相应的乘法。

考虑流形间的光滑映射F：$M\to N$。它诱导出代数同态F^*：$\Lambda(N)\to\Lambda(M)$，且满足关系

$$F^*\circ d=d\circ F^*$$

由此不难看出，F^*使闭形式变为闭形式，恰当形式变为恰当形式。因此它也把上同调类变为上同调类。所以，F^*又诱导出上同调代数的同态

$$F^*\text{:}\quad H^*_{dR}(N)\to H^*_{dR}(M)$$

对于恒同映射id：$M\to M$，显然

$$(id)^*=id$$

对于复合映射F：$M\to N$，G：$N\to K$有

$$(G\circ F)^*=F^*\circ G^*$$

de Rham 上同调论的一个基本性质是同伦不变性。为此先看一个命题。

命题 1 设π：$M\times R\to M$是标准投影，使$\pi(x, a)=x$.其中$x\in M$，$a\in R$。则π^*：$H^*_{dR}(M)\to H^*_{dR}(M\times R)$是双内射。

证明：设i_0：$M\to M\times R$为$i_0(x)=(x, 0)$，显然，$\pi\circ i_0=id$（M上的恒同映射）。所以有

$$i_0^* \circ \pi^* = (id)^* = id: H^*_{dR}(M) \to H^*_{dR}(M)$$

是上同调代数 $H^*_{dR}(M)$ 中的恒同映射。

下面要证明 $\pi^* \circ i_0^* = id$ 是 $H^*_{dR}(M \times R)$ 中的恒同映射。为此，命$\omega \in \Lambda^k$ $(M \times R)$，它应由以下两种形式所构成，不妨设ω就具有其中一种形式：

(a) $\omega = \pi^*(\varphi) \wedge f(xt,)dt$，$\varphi \in \Lambda^{k-1}(M)$；

(b) $\omega = \pi^*(\varphi) f(x,t)$，$\varphi \in \Lambda^k(M)$，

定义同伦算子S：Λ^k $(M \times R) \to \Lambda^{k-1}(M \times R)$ 为

$$S[\pi^*(\varphi) \cdot f(x, t)] = 0$$

$$S[\pi^*(\varphi) \wedge f(x, t)dt] = \pi^*(\varphi)\int_0^t f(x, t)dt.$$

则算子S有下列性质：

$$(-1)^{k-1}(d \circ S - S \circ d) = id - \pi^* \circ i_0^* \qquad (*)$$

若此性质得证，设ω为$M \times R$上任一闭形式，即$d\omega = 0$，则

$$(-1)^{k-1}(d \circ S - S \circ d)\omega = (id - \pi^* \circ i_0^*)\omega$$

$$d[(-1)^{k-1}S\omega] = \omega - (\pi^* \circ i_0^*)\omega$$

即$\omega \sim (\pi^* \circ i_0^*)\omega$。这说明$(\pi^* \circ i_0^*)[\omega] = [\omega]$。所以，$\pi^* \circ i_0^*$是$H^*_{dR}(M)$ 中的恒同映射。

最后证明S的上述性质（$*$）。

当$\omega = \pi^*(\varphi) \wedge f(x, t)dt$，$\varphi \in \Lambda^{k-1}(M)$

$$d(S\omega) = d\left[\pi^*(\varphi)\int_0^t f(x, t)dt\right]$$

$$= d\pi^*(\varphi)\int_0^t f(x, t)dt + (-1)^{k-1}\pi^*(\varphi)$$

$$\wedge\left[\int_0^t \left(\sum \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\right)dt + f(x, t)dt\right]$$

$$S(d\omega) = S\Big[d\pi^*(\varphi) \wedge f(x, t)dt$$

$$+ (-1)^{k-1}\pi^*(\varphi) \wedge \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i \wedge dt\Big]$$

$$= d\pi^*(\varphi)\int_0^t f(x, t)dt + (-1)^{k-1}\pi^*$$

$$(\varphi)\wedge\int_0^t\left(\sum\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i\right)dt$$

两式相减，即得

$$\begin{aligned}&(-1)^{k-1}[dS\omega - Sd\omega]\\&=\pi^*(\varphi)\wedge f(x, t)dt\\&=\omega\end{aligned}$$

所以

$$(-1)^{k-1}[dS - Sd] = id$$

注意这时

$$\begin{aligned}\pi^*\circ i_0^*(\omega) &= \pi^*(i_0\pi^*(\varphi)\wedge i_0^* f(x, t)dt\\&=\pi^*(\omega)\wedge\pi^*\circ i_0^* f(x, t)dt\\&=0\end{aligned}$$

因为 $i_0^* dt = 0$。

当 $\omega = \pi^*(\varphi)f(x, t)$，$\varphi\in\Lambda^k(M)$

$$d(S\omega) = 0$$

$$\begin{aligned}S(d\omega) &= S\left[\pi^*(d\varphi)f(x, t) + (-1)^k\pi^*(\varphi)\right.\\&\left.\wedge\left(\sum\frac{\partial f}{\partial x^i}dx^i + \frac{\partial f}{\partial t}dt\right)\right]\\&=(-1)^k\pi^*(\varphi)\int_0^t\frac{\partial f}{\partial t}dt\\&=(-1)^k\pi^*(\varphi)(f(x, t) - f(x, 0))\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&(-1)^{k-1}(dS\omega - Sd\omega)\\&=\pi^*(\varphi)f(x, t) - \pi^*(\varphi)f(x, 0)\\&=\omega - \pi^*\circ i_0^*\omega\end{aligned}$$

所以也有

$$(-1)^{k-1}(d\circ S - S\circ d) = id - \pi^*\circ i_0^* \quad \|$$

推论 1 （Poincaré 引理）

$$H^k_{dR}(R^n)\cong H^k_{dR}(\text{点})\cong\begin{cases} R, & k=0 \\ 0, & k\neq 0\end{cases}$$

证明：考虑投影 π：$R^n\to R^{n-1}$，则

π^*：$H^k_{dR}(R^{n-1})\to H^k_{dR}(R^n)$

是同构。由此可得到

$H^k_{dR}(R^n)\cong H^k_{dR}(R^{n-1})\cong\cdots\cong H^k_{dR}(R)\cong H^k_{dR}$（点）。‖

推论 1 的另一种表达形式如下：考虑序列

$$0\to R\xrightarrow{i}\Lambda^0(R^q)\xrightarrow{d}\Lambda^1(R^q)\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\Lambda^q(R^q)\to 0$$

当 $a\in R$，$i(a)$ 表示 R^q 上的常值函数，因此有

$$\mathrm{Im}(i)=\ker\{d:\Lambda^0(R^q)\to\Lambda^1(R^q)\}$$

推论 1 等价于说，上述序列是正合的。

推论 2 如果 f_0，f_1：$M\to N$ 是光滑同伦的，则 $f_0^*=f_1^*$：$H^*_{dR}(N)\to H^*_{dR}(M)$。

证明：令 f_0 和 f_1 之间的光滑同伦是

$$F：M\times I\to N$$

它可以光滑地扩充为 F：$M\times R\to N$。再定义

$$i_0,\ i_1：M\to M\times R$$

使得 $i_0(x)=(x,\ 0)$，$i_1(x)=(x,\ 1)$。则

$$f_0=F\circ i_0,\quad f_1=F\circ i_1$$

因此

$$f_0^*=i_0^*\circ F^*,\quad f_1^*=i_1^*\circ F^*$$

根据命题 1

$$i_0^*=(\pi^*)^{-1},\quad i_1^*=(\pi^*)^{-1}$$

所以

$$i_0^*=i_1^*$$

$$f_0^*=f_1^*\quad ‖$$

我们已经知道向量丛的概念，下面考虑另外一种光滑纤维丛 π：$E\to M$。其中 M 是微分流形，纤维型是带边缘紧致流形 F，且

$\partial F \neq \phi$。这时，E也是带边流形，且$\partial E \neq \phi$。若将π限于∂E，就得到

$$\pi^{\partial}:\ \partial E \to M$$

这也是一个纤维丛，它的纤维型是∂F。

命 $\dim M = n$，$\dim F = f$，$\dim E = n + f$

定义 2 映射π_*：$\Lambda^r(E) \to \Lambda^{r-f}(M)$，使得

（a）如果$r < f$，则$\pi_* = 0$；

（b）如果$r \geqslant f$，对于任意的$\varphi \in \Lambda_0^{n-r+f}(M)$，和任意的$\psi \in \Lambda^r(E)$，其中$\Lambda_0^{n-r+f}$表示所有的$\varphi$具有紧致支集，则$\pi_*\psi$满足关系

$$\int_M \pi_*\psi \wedge \varphi = \int_E \psi \wedge \pi^*\varphi$$

容易看出，这样定义的$\pi_*\psi$是唯一确定的。

命题 2 当$r \geqslant f$时，$\pi_* \circ d + (-1)^{f+1} d \circ \pi_* = (\pi^{\partial})_* \circ i^*$。其中$\pi$：$E \to M$，$\pi^{\partial}$：$\partial E \to M$，$i$：$\partial E \to E$（包含映射）。

证明：设$\omega \in \Lambda^r(E)$，$\varphi \in \Lambda_0^{n+f-r-1}(M)$。

$$\int_M (\pi_* d\omega + (-1)^{f+1} d\pi_*\omega) \wedge \varphi$$

$$= \int_M \{\pi_* d\omega \wedge \varphi + (-1)^{f+1}[d(\pi_*\omega \wedge \varphi) - (-1)^{r-f}\pi_*\omega \wedge d\varphi]\}$$

$$= \int_M \pi_* d\omega \wedge \varphi + (-1)^{f+1}\int_M d(\pi_*\omega \wedge \varphi) + (-1)^r \int_M \pi_*\omega \wedge d\varphi$$

由于 Stokes 定理和φ有紧致支集，

$$\int_M d(\pi_*\omega \wedge \varphi) = \int_{\partial M} \pi_*\omega \wedge \varphi = 0$$

所以

$$\text{上式} = \int_E d\omega \wedge \pi^*\varphi + (-1)^r \int_E \omega \wedge \pi^*(d\varphi)$$

$$=\int_E d(\omega\wedge\pi^*\varphi)$$

$$=\int_{\partial E} i^*\omega\wedge(\pi^\partial)^*\varphi$$

$$=\int_M \pi_*^\partial(i^*\omega)\wedge\varphi$$

由于ω和φ的任意性，得到

$$\pi_*\circ d+(-1)^{f+1}d\circ\pi_*=(\pi^\partial)_*\circ i^* \quad \|$$

注意 当$\partial E=\phi$时，从证明容易看出公式左端变为零，这时，π_*和d或是交换的，或是反交换的。

当$\omega\in\Lambda^r(E)$是闭的，即$d\omega=0$，则

$$d(\pi_*\omega)=(-1)^f\pi_*(d\omega)=0$$

当ω是恰当的，即有$\omega=d\eta$，则

$$\pi_*\omega=(-1)^f d(\pi_*\eta)$$

因此，π_*诱导出上同调同态

$$\pi_*: H_{dR}^r(E)\to H_{dR}^{r-f}(M)$$

2. Čech 上同调论

为了证明本章的主要定理de Rham定理，复习一下代数拓扑中的知识。

令M是微分流形，$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$是M的局部有限开覆盖。每一个开集U_i称为一个零维单形，每个$U_i\cap U_j\neq\phi$，$i\neq j$，称为一个一维单形，…，显然，p维单形

$$\sigma(U_{i_0},\ \cdots,\ U_{i_p}):(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p}\neq\phi)$$

且i_0，…，i_p各不相同。由$\mathscr{U}$构成的所有单形称为骨架(nerve)，记成$N(\mathscr{U})$。

定义3 $N(\mathscr{U})$的一个p维上链f，是对$N(\mathscr{U})$的每一个p维单形$\sigma(U_{i_0},\ \cdots,\ U_{i_p})$，$f(\sigma)=f(U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_p})\in R$，即使每个$p$维单形对应一常数。$N(\mathscr{U})$的所有$p$维上链构成群(带有自然加法)称为$p$维上链群，记成$\check{C}^p(N(\mathscr{U}),\ R)$。

上边缘算子δ_p: $\check{C}_p(N(\mathscr{U}),R)\to\check{C}^{p+1}(N(\mathscr{U}),\ R)$定义为

$$\delta_p f(U_{i_0},\cdots,U_{i_{p+1}})=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\rho f(U_{i_0},\cdots,\hat{U}_{i_k},\cdots,U_{i_{p+1}})$$

其中ρ表示把函数限制到$U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}}$上。

可以证明：$\delta_{p+1}\circ\delta_p=0$，简记成$\delta^2=0$。

定义 4 δ_p之核称为p维上闭链群，记成$\check{Z}^p(N(\mathscr{U}),R)$. δ^{p-1}之象称为p维上边缘链群，记成$\check{B}^p(N(\mathscr{U}),R)$。商群$\check{H}^p(N(\mathscr{U}),R)=\check{Z}^p(N(\mathscr{U}),R)/\check{B}^p(N(\mathscr{U}),R)$称为$N(\mathscr{U})$上的$p$维上同调群。

显然，$\check{B}^0(N(\mathscr{U}),R)=0$，$\check{H}^0(N(\mathscr{U}),R)=R$。

由定义看到，$\check{H}^p(N(\mathscr{U}),R)$要决定于覆盖$\mathscr{U}$的选择. 若$\mathscr{V}=\{V_a\}$是$\mathscr{U}=\{U_a\}$的加细覆盖，即对于任何$V_i\in V$都有$\mathscr{U}$中相应的$U_i$使$V_i\subset U_i$，现在定义映射

$$\varphi^*:\ \check{H}^p(N(\mathscr{U}),R)\to\check{H}^p(N(\mathscr{V}),R)$$

如下：设f是$N(\mathscr{U})$的p维上链，则$\varphi^* f$是$N(\mathscr{V})$的一个p维上链，使得

$$\varphi^* f(V_0,V_1,\cdots,V_p)=f(U_0,U_1,\cdots U_p)|_{V_0\cap\cdots\cap V_p}$$

其中$V_i\subset U_i$，$i=0,\cdots,p$。

容易验证：$\varphi^*\circ\delta=\delta\circ\varphi^*$. 并且由此即可得知$\varphi^*$把上闭链映为上闭链，把上边缘链映为上边缘链。因此，φ^*可以诱导出上同调群的映射，仍记成φ^*，

$$\varphi^*:\ \check{H}^p(N(\mathscr{U}),R)\to\check{H}^p(N(\mathscr{V}),R)$$

注意 φ^*的定义与U_i的选择无关，证明从略。

如果我们把$\mathscr{U}$的加细手续无限继续下去，并使每个开集都趋于一点，则可得到极限情形。

定义 5 $\check{H}^p(M,R)=\lim\limits_{u\to 0}\check{H}^p(N(\mathscr{U}),R)$称为$M$的Cěch p维上同调群。

令 $\check{H}^*(N(\mathscr{U}), R)=\bigoplus\limits_{p=0}^{n}\check{H}^p(N(\mathscr{U}), R)$，并在其中引进乘法——cup 积。

定义 6 设 $f\in\check{C}^p(N(\mathscr{U}), R)$，$g\in\check{C}^q(N(\mathscr{U}), R)$，则 cup 积 $(f\cup g)\in\check{C}^{p+q}(N(\mathscr{U}), R)$，使得

$$(f\cup g)(U_0, \cdots, U_p, \cdots, U_{p+q})$$
$$=f(U_0, \cdots, U_p)\cdot g(U_p, \cdots, U_{p+q})$$

容易验证：$\delta(f\cup g)=\delta f\cup g+(-1)^p f\cup\delta g$ 由此即可得到

上闭链∪上闭链＝上闭链，

上闭链∪上边缘链＝上边缘链，

上边缘链∪上闭链＝上边缘链，

上边缘链∪上边缘链＝上边缘链。

因此，诱导出上同调类之间的 cup 积：

$$[f]\cup[g]=[f\cup g]$$

这样 $\check{H}^*(N(\mathscr{U}), R)$ 构成环，称为$N(\mathscr{U})$ 的上同调环。极限 $\check{H}^*(M, R)=\lim\limits_{\mathscr{U}\to 0}\check{H}^*(N(\mathscr{U}), R)$ 称为M上的Čech上同调环.

下面将把Čech同调推广到复形K上。仍设$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$是 M 的一组局部有限开覆盖。

定义 7 $K^{p,q}(\mathscr{U})=\check{C}^p(N(\mathscr{U}), \Lambda^q)$，其中 Λ^q 是M上的 q－形式空间．这样对于任一 $c\in K^{p,q}(\mathscr{U})$ 和$N(\mathscr{U})$ 上的 p 维单形 $\sigma=U_0\cap\cdots\cap U_p$，则

$$c(U_0, \cdots U_p)=c_{0,\cdots,p}$$

是 σ 上一个实系数 q －形式。

在 $K^{p,q}(\mathscr{U})$ 中的每个元素都具有 p 维上链和 q －形式两重性，因此可以引进两种算子：

Čech 上边缘算子 δ：$K^{p,q}(\mathscr{U})\to K^{p+1,q}(\mathscr{U})$，使

$$(\delta c)_{i_0\cdots i_{p+1}}=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\rho c_{i_0\cdots\hat{i}_k\cdots i_{p+1}}$$

其中ρ是把形式限制到$U_{i_0}\cap\cdots\cap U_{i_{p+1}}$上；

de Rham 外微分算子d：$K^{p,q}(\mathscr{U})\to K^{p,q+1}(\mathscr{U})$，使得

$$(dc)_{i_0\cdots i_p}=d(c_{i_0\cdots i_p})$$

不难验证：$d^2=0$，$\delta^2=0$，$d\delta=\delta d$。

定义 8 令$K^k(\mathscr{U})=K^{k,0}(\mathscr{U})\oplus K^{k-1,1}(\mathscr{U})\oplus\cdots\oplus K^{0,k}(\mathscr{U})$，即$K^k(\mathscr{U})=\sum_{p+q=k}K^{p,q}(\mathscr{U})$，则复形$K$表示

$$K^*(\mathscr{U})=\sum_k{}^\circ K^k(\mathscr{U})$$

K中的边缘算子定义为D：$K^k(\mathscr{U})\to K^{k+1}(\mathscr{U})$，使得满足

$$D=\delta+(-1)^p d$$

命题 3 $D^2=0$

证明：$D(Dc)=D(\delta c+(-1)^p dc)$

$=(\delta+(-1)^{p+1}d)(\delta c)+(-1)^p(\delta+(-1)^p d)dc$

$=(-1)^{p+1}d\delta c+(-1)^p\delta dc$

$=0$ ||

下面在$K^*(\mathscr{U})$中引进乘法$\times=(\cup,\wedge)$：

$$\times:\ K^{p,q}(\mathscr{U})\times K^{r,s}(\mathscr{U})\to K^{p+r,q+s}(\mathscr{U})$$

使得对于$\omega\in K^{p,q}(\mathscr{U})$，$\eta\in K^{r,s}(\mathscr{U})$，

$$(\omega\times\eta)_{i_0\cdots i_p\cdots i_{p+r}}$$
$$=(-1)^{qr}\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\eta_{i_p\cdots i_{p+r}}$$

再利用线性扩张，就完全确定了$K^*(\mathscr{U})$中的乘法

$$\times:\ K^k(\mathscr{U})\times K^l(\mathscr{U})\to K^{k+l}(\mathscr{U})$$

命题 4 D是$K^*(\mathscr{U})$中的反导子，即对$\omega\in K^{p,q}(\mathscr{U})$，$\eta\in K^{r,s}(\mathscr{U})$，

$$D(\omega\times\eta)=D\omega\times\eta+(-1)^{p+q}\omega\times D\eta$$

证明：因为$\omega\in K^{p,q}(\mathscr{U})$，$\eta\in K^{r,s}(\mathscr{U})$，所以

$$(\omega\times\eta)_{i_0\cdots i_{p+r}}=(-1)^{qr}\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\eta_{i_p\cdots i_{p+r}}$$

$$\delta(\omega\wedge\eta)_{i_1\cdots i_{p+r+1}}=\sum_k(-1)^k(\omega\wedge\eta)_{i_0\cdots\hat{i}_k\cdots i_{p+r+1}}$$

$$=\sum_{k\leqslant p}(-1)^k(-1)^{qr}\omega_{i_0\cdots\hat{i}_k\cdots i_{p+1}}\wedge\eta_{i_{p+1}\cdots i_{p+r+1}}$$

$$+\sum_{k>p}(-1)^k(-1)^{qr}\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\eta_{i_p\cdots\hat{i}_k\cdots i_{p+r+1}}$$

$$=\sum_{k\leqslant p+1}[(-1)^k(-1)^{qr}\omega_{i_0\cdots\hat{i}_k\cdots i_{p+1}}]\wedge\eta_{i_{p+1}\cdots i_{p+r+1}}$$

$$-(-1)^{p+1}(-1)^{qr}\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\eta_{i_{p+1}\cdots i_{p+r+1}}$$

$$+\sum_{k\geqslant p}(-1)^k(-1)^{qr}\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\eta_{i_p\cdots\hat{i}_k\cdots\hat{i}_{p+r+1}}$$

$$-(-1)^p(-1)^{qr}\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\eta_{i_{p+1}\cdots i_{p+r+1}}$$

$$=(-1)^{qr}(\delta\omega)_{i_0\cdots i_{p+1}}\wedge\eta_{i_{p+1}\cdots i_{p+r+1}}$$

$$+(-1)^{qr}(-1)^p\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\delta\eta_{i_p\cdots i_{p+r+1}}$$

$$=(\delta\omega\times\eta+(-1)^{p+q}\omega\times\delta\eta)_{i_0\cdots i_{p+r+1}}$$

因此

$$\delta(\omega\times\eta)=\delta\omega\times\eta+(-1)^{p+q}\omega\times\delta\eta$$

另一方面

$$(-1)^{p+r}d\,(\omega\times\eta)_{i_0\cdots i_{p+r}}$$

$$=(-1)^{p+r}(-1)^{qr}d\,(\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\eta_{i_p\cdots i_{p+r}})$$

$$=(-1)^{p+r+qr}[d\,\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge\eta_{i_p\cdots i_{p+r}}$$

$$+(-1)^q\omega_{i_0\cdots i_p}\wedge d\eta_{i_p\cdots i_{p+r}}]$$

$$=[(-1)^{p+r+qr}\cdot(-1)^{(q+1)r}d\omega\times\eta+(-1)^{p+r+qr}\cdot$$

$$(-1)^q\cdot(-1)^{qr}\omega\times d\eta]_{i_0\cdots i_{p+}}$$

$$=[(-1)^p d\omega\times\eta+(-1)^{p+q+r}\omega\times d\eta]_{i_0\cdots i_{p+r}}$$

所以

$$(-1)^{p+r}d(\omega\times\eta)$$
$$=(-1)^{p}d\omega\times\eta+(-1)^{p+q+r}\omega\times d\eta$$

因此

$$D(\omega\times\eta)=\delta(\omega\times\eta)+(-1)^{p+r}d(\omega\times\eta)$$
$$=(\delta+(-1)^{p}d)\omega\times\eta+(-1)^{p+q}\omega\times(\delta+(-1)^{r}d)\eta$$
$$=D\omega\times\eta+(-1)^{p+q}\omega\times D\eta.\ \|$$

定义 9 $Z^{p}(K,\ D)=\{\omega\in K^{p}(\mathscr{U}):\ D\omega=0\}$

称为复形K的上闭链群。

$$B^{p}(K,\ D)=\{\omega\in K^{p}(\mathscr{U}):\exists\eta\text{使}D\eta=\omega\}$$

称为复形K的上边缘链群。

$$H^{p}(K,\ D)=Z^{p}(K,\ D)/B^{p}(K,\ D)$$

称为复形K的上同调群。最后

$$H^{*}(K,\ D)=\sum_{p=0}^{\infty}{}^{\circ}\ H^{p}(K,\ D)$$

称为复形K的上同调环。

需要注意以下两个具体情况：

(1) $K^{0,q}(\mathscr{U})=\{U_i\text{上的}\ q\text{-形式},\ U_i\in\mathscr{U}\}$，

$$\delta:\ K^{0,q}(\mathscr{U})\to K^{1,q}(\mathscr{U})$$

设 $c\in\delta$ 的核，则$\delta c=0$，即对于任意的U、$V\in\mathscr{U}$，

$$\delta c(U,\ V)=c(V)|_{U\cap V}-c(U)|_{U\cap V}=0$$

这说明在$U\cap V$上$c(U)=c(V)$。即c是M上的整体q-形式。换句话说，下列序列

$$0\to A^{q}(M)\xrightarrow{\alpha}K^{0,q}(\mathscr{U})\xrightarrow{\delta}K^{1,q}(\mathscr{U})$$

是正合的，其中α是包含映射。

(2) $d:\ K^{p,0}(\mathscr{U})\to K^{p,1}(\mathscr{U})$。若$c\in K^{p,0}(\mathscr{U})$，$\sigma=U_0\cap\cdots\cap U_p$是$N(\mathscr{U})$的任一$p$维单形，则$c(U_0\cap\cdots\cap U_p)$是$\sigma$上的函数。若$c\in d$的核，即$dc=0$，则$c(U_0\cap\cdots\cap U_p)$是$\sigma$上的常函数。所以$c\in\check{C}^{p}(N(\mathscr{U}),\ R)$。这说明下列序列

$$0 \to \check{C}^p(N(\mathscr{U}), R) \xrightarrow{\beta} K^{p,0}(\mathscr{U}) \xrightarrow{d} K^{p,1}(\mathscr{U})$$

是正合的，其中β是包含映射。

3. de Rham 定理

定理 设$\check{H}^*(M, R)$是实Cěch 上同调环，则存在规范同构

$$\theta_M: H^*_{dR}(M, R) \to \check{H}^*(M, R)$$

而且如果$f: M \to N$是光滑的，则下列图解可交换：

$$\begin{array}{ccc} H^*_{dR}(M, R) & \xrightarrow{\theta_M} & \check{H}^*(M, R) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ H^*_{dR}(N, R) & \xrightarrow{\theta_N} & \check{H}^*(N, R) \end{array}$$

先证明两个引理。

引理 1 微分流形M的任何开覆盖总存在更细密的简单覆盖。

证明：M的覆盖$\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$称为简单的，如果其任何有限交$U_{\alpha_0} \cap \cdots \cap U_{\alpha_p} \neq \phi$都是$M$的可收缩集。

设$\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$是$M$的任意开覆盖，由于$M$满足第二可数公理，所以不妨假定$\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$是可数覆盖。现在对每个$U_\alpha$选择它的一个可数、稠密点集$\{p_{\alpha_i}, i = 1, 2, \cdots\}$，对每个点$p_{\alpha_i}$，设$\varphi$是该点附近的坐标映射，$\varphi(p_{\alpha_i}) \in R^n$。取$\varphi(p_{\alpha_i})$的球形邻域$B_{\alpha_i}$，从而得到$p_{\alpha_i}$的邻域$V_{\alpha_i}$，满足

(a) $\varphi(V_{\alpha_i}) = B_{\alpha_i}$，在局部坐标系内；

(b) $V_{\alpha_i} \subset U_\alpha$。

这样，$\{V_{\alpha_i}\}$对所有的α和i，构成$\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$的加细覆盖，而且每个$V_{\alpha_i}$是可收缩集。 ‖

引理 2 令$D' = \delta$，$D'' = (-1)^p d$，即$D = \delta + (-1)^p d = D' + D''$。

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & \uparrow d & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
0 & \rightarrow & \Lambda^q(M) & \xrightarrow{\alpha} & K^{0,q} & \xrightarrow{D'} & K^{1,q} & \xrightarrow{D'} & \cdots & \rightarrow & K^{p-1,q} & \underset{L}{\overset{\longleftarrow}{\rightarrow}} & K^{p,q} & \rightarrow & K^{p+1,q} \rightarrow \\
 & & \uparrow d & & \uparrow D'' & & \uparrow D'' & & & & \uparrow D'' & & \uparrow D'' & & \uparrow D'' \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & & \uparrow d & & \uparrow D'' & & \uparrow D'' & & & & \uparrow D'' & & \uparrow D'' & & \uparrow D'' \\
0 & \rightarrow & \Lambda^1(M) & \xrightarrow{\alpha} & K^{0,1} & \xrightarrow{D'} & K^{1,1} & \xrightarrow{D'} & \cdots & \xrightarrow{D'} & K^{p-1,1} & \xrightarrow{D'} & K^{p,1} & \xrightarrow{D'} & K^{p+1,1} \rightarrow \\
 & & \uparrow d & & \uparrow D'' & & \uparrow D'' & & & & \uparrow D'' & & \uparrow D'' & & \uparrow D'' \\
0 & \rightarrow & \Lambda^0(M) & \xrightarrow{\alpha} & K^{0,0} & \xrightarrow{D'} & K^{1,0} & \xrightarrow{D'} & \cdots & \xrightarrow{D'} & K^{p-1,0} & \xrightarrow{D'} & K^{p,0} & \xrightarrow{D'} & K^{p+1,0} \rightarrow \\
 & & & & \uparrow \beta & & \uparrow \beta & & & & \uparrow \beta & & \uparrow \beta & & \uparrow \beta \\
 & & & & \check{C}^0 & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^1 & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^{p-1} & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^p & \xrightarrow{\delta} & \check{C}^{p+1} \rightarrow \\
 & & & & \uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
$$

则上述图解中，行是正合的．如果$\mathscr{U}$是简单覆盖，则列也是正合的。

证明：首先证明行序列的正合性。

令$\{\lambda_\alpha\}$是从属于$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$的单位分解。

定义

$$L: \check{C}^p(N(\mathscr{U}), \Lambda^q) \rightarrow \check{C}^{p-1}(N(\mathscr{U}), \Lambda^q)$$

使得对于$\forall c \in \check{C}^p(N(\mathscr{U}), \Lambda^q)$

$$\{L(c)\}_{\alpha_0,\cdots,\alpha_{p-1}} = \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha,\alpha_0,\cdots,\alpha_{p-1}}$$

这时

$$
\begin{aligned}
\{D' Lc\}_{\alpha_0\cdots\alpha_p} &= \{\delta Lc\}_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \\
&= \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \sum_\alpha \lambda_\alpha c_{\alpha,\alpha_0,\cdots,\hat{\alpha}_i,\cdots,\alpha_p}
\end{aligned}
$$

设$D'c=\delta c=0$，则

$$
\begin{aligned}
\{\delta c\}_{\alpha\alpha_0\cdots\alpha_p} &= c_{\alpha_0\cdots\alpha_p} + \sum_{i=0}^{p} (-1)^{i+1} c_{\alpha\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_i\cdots\alpha_p} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

所以

$$c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}=\sum_{i=0}^{p}(-1)^i c_{\alpha\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_i\cdots\alpha_p}$$

另一方面

$$\{D'Lc\}_{\alpha_0\cdots\alpha_p}=\sum_{\alpha}\lambda_\alpha\left(\sum_{i=0}^{p}(-1)^i c_{\alpha\alpha_0\cdots\hat{\alpha}_i\cdots\alpha_p}\right)=c_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$$

这说明，若 c 是D'的核，则有$D'Lc=c$，即 c 必是D'的象。反之，若 c 是D'的象，即 $c=D'f$，由于$D'^2=0$，得$D'c=0$再考虑到前面的注意（1），就证明了行序列是正合的。

关于列序列，当$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$是简单覆盖，每个 p 维单形$\sigma=U_{\alpha_0}\cap\cdots\cap U_{\alpha_p}\cong R^n$，根据Poincaré 引理，$H^q(R^n)=0$，$\forall q>0$ 再考虑到前面的注意（2），即得列的正合性。 ‖

de Rham定理的证明：

如前所述，有包含映射

$$\alpha:\ \Lambda^*(M)\to K^*(\mathscr{U})$$
$$\beta:\ \check{C}^*(N(\mathscr{U}),R)\to K^*(\mathscr{U})$$

而且$\delta\circ\alpha=0$，$d\circ\beta=0$。因此，根据可交换性

$$d\alpha=\alpha d,\quad \delta\beta=\beta\delta$$

有

$$D\alpha=(\delta+(-1)^p d)\alpha=(-1)^0 d\alpha=\alpha\circ d$$
$$D\beta=(\delta+(-1)^p d)\beta=\delta\beta=\beta\circ D'$$

由此不难看出，α 诱导出一个上同调环同态

$$\alpha^*:H^*_{dR}(M,\ R)\to H^*(K,\ D).$$

类似地，β也诱导出一个上同调环同态

$$\beta^*:\check{H}^*(N(\mathscr{U}),\ R)\to H^*(K,\ D)$$

由于α，β是单一的，所以α^*，β^*也是单一的。

下面证明α^*，β^*还是到上的。

设$[z]\in H^*(K,D)$，则$Dz=0$，且$z\in\sum\limits_{p+q=n}K^{p,q}(\mathscr{U})$。由此可表示成

$$z=\sum_{p=0}^{n}z_p,\quad z_p\in K^{p,n-p}(\mathscr{U})$$

所以

$$\begin{aligned}Dz&=Dz_0+Dz_1+\cdots+Dz_n\\&=D'z_0+D''z_0+D'z_1+D''z_1+\cdots+\\&\quad D'z_n+D''z_n\\&=0\end{aligned}$$

但是$D'z_0\in K^{1,n}$，$D''z_0\in K^{0,n+1}$，$D'z_1\in K^{2,n-1}$，$D''z_1\in K^{1,n}$，所以由$Dz=0$，可知$D''z_0=0$。由前面图表中的正合性，存在$u_1\in K^{0,n-1}$，使得$z_0=D''u_1$。于是$z-Du_1$不包含$K^{0,n}$的元素，可记成$z-Du_1=\sum\limits_{p=0}^{n}z'_p$。再根据$D(z-Du_1)=0$，所以存在$u_2$，使$D''u_2=z'_1$，所以$z-Du_1-Du_2$不包含$K^{0,n}$和$K^{1,n-1}$的元素。这样继续下去，可找到一系列$u_1$，$u_2$，…，$u_n$，使得

$$z-D(u_1+\cdots+u_n)=\omega\in K^{n,0}$$

而且$\omega\sim z$，即$[z]=[\omega]$。注意$D\omega=0$，则$D''\omega=0$，再由列的正合性，存在$\nu\in\check{C}^n(N(\mathscr{U}),R)$，使得$\omega=\beta(\nu)$，而且$\delta\nu=0$。这样$\beta^*([\nu])=[\omega]=[z]$。所以$\beta^*$是到上的。通过类似的讨论，可以得到$\alpha^*$也是到上的。

由此可知

$$\alpha^*:H^*_{dR}(M,R)\cong H^*(K,D)$$
$$\beta^*:\check{H}^*(N(\mathscr{U}),R)\cong H^*(K,D)$$

都是同构。由于$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$是M的简单覆盖，可以无限加细，加细过程记为$\mathscr{U}\to0$，则

$$(\beta^*)^{-1}\cdot\alpha^*\circ H^*_{dR}(M,R)$$

$$\cong \lim_{\mathscr{U}\to 0} \check{H}^*(N(\mathscr{U}), R) = \check{H}^*(M, R)$$

因此，$\theta_M = (\beta^*)^{-1} \circ \alpha^*$即是所求的上同调环同 构。

最后，对于光滑映射$f: M \to N$，下面图解是交换的：

$$\begin{array}{ccc} H^*_{dR}(M, R) & \xrightarrow{\theta_M} & \check{H}^*(M, R) \\ \uparrow f^* & & \uparrow f^* \\ H^*_{dR}(N, R) & \xrightarrow{\theta_N} & \check{H}^*(N, R) \end{array}$$

这要通过α^*与β^*对f^*的这种自然性，再取极限得到θ_M的自然性。证明从略。 ||

de Rham 定理给我们提供了用外微分形式来计算微分流形的上同调群的办法，从而得到微分流形的整体性质。因此，这个定理的重要性是十分明显的。

§ 4.2 Hodge定理

我们已经知道，de Rham 上同调群$H^p_{dR}(M)$中的每一个元素是一个p维上同调类，该上同调类中包含许多闭的p-形式，它们之间相差一个正合形式。W. V. D. Hodge对紧致Riemann 流形证明了：在每一个 de Rham 上同调类中存在唯一的形式，满足 Laplace 方程，这样的形式称为调和形式。换言之，在每一个 de Rham 上同调类中存在唯一的调和形式。本节就是介绍并证明这个重要的定理。

1. 星形算子

（1）内积空间中的星形算子

设V是n维的带内积的实向量空间，e_1，…，e_n是V的一组标准正交基，$\langle e_i, e_j\rangle = \delta_{ij}$。这组基确定了$V$的定向。现在我们要把$V$上的内积扩充成外代数$\Lambda^*(V)$上的内积。设$w \in \Lambda^p(V)$，$v \in \Lambda^q(V)$，定义内积$\langle w, v\rangle$如下：

如果$p \neq q$，$\langle w, v\rangle = 0$，

如果 $p=q$，命

$$w=w_1\wedge\cdots\wedge w_p,\quad v=v_1\wedge\cdots\wedge v_p,\quad w_i,\ v_j\in V.$$

定义$\langle w,\ v\rangle=\det(\langle w_i,\ v_j\rangle)$。然后根据分配律把此定义线性扩充到整个 $\Lambda^*(V)$ 上。

容易看出，

$$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\quad(1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n)$$

构成$\Lambda^p(V)$ 的标准正交基。因为

$$\begin{aligned}&\langle e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p},\ e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}\rangle\\&=\det(\langle e_{i_m},\ e_{j_n}\rangle)\\&=\delta_{i_1\cdots i_p,j_1\cdots j_p}\end{aligned}$$

其中当 $(i_1,\cdots,\ i_p)=(j_1,\cdots,\ j_p)$ 时其值为1。当 $(i_1,\ \cdots,\ j_p)\neq(j_1,\cdots,j_p)$ 时，其值为0。不难验证，$\Lambda^*(V)$ 构成 2^n 维分次欧氏空间。

定义 1 $\Lambda^*(v)$ 中的星形算子$*$：$\Lambda^{*p}(V)\to\Lambda^{*n-p}(V)$ 定义为

$$*(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})=e_{i_{p+1}}\wedge\cdots\wedge e_{i_n}$$

其中e_{i_1}，$\cdots$，e_{i_p}，$e_{i_{p+1}}$，$\cdots$，e_{i_n}应合于已知定向。然后再利用线性关系把$*$扩充到 $\Lambda^{*p}(V)$ 上。

特别地

$$*(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)=1,\quad *(1)=e_1\wedge\cdots\wedge e_n.$$

例 当$n=5$，由于

$$e_3\wedge e_1\wedge e_5\wedge e_2\wedge e_4=e_1\wedge e_2\wedge e_3\wedge e_4\wedge e_5,$$

所以

$$*(e_3\wedge e_1\wedge e_5)=e_2\wedge e_4$$

命题 1 设$w\in\Lambda^{*p}(V)$，则有

$$**w=(-1)^{p(n-p)}w$$

证明： 只须假设$w=e_1\wedge\cdots\wedge e_p$

$$*w=e_{p+1}\wedge\cdots\wedge e_n$$

由于

$$e_{p+1}\wedge\cdots\wedge e_n\wedge e_1\wedge\cdots\wedge e_p$$
$$=(-1)^{p(n-p)}e_1\wedge\cdots\wedge e_p\wedge\cdots\wedge e_n$$
$$**w=(-1)^{p(n-p)}e_1\wedge\cdots\wedge e_p$$
$$=(-1)^{p(n-p)}w \quad \|$$

命题 2 设w和$v\in\wedge^{*p}(V)$，则有

$\langle w,\ v\rangle=*(w\wedge *v)=*(v\wedge *w)$。

证明： 设

$$w=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}$$

$$v=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n}b_{j_1\cdots j_p}e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}$$

则

$$\langle w,\ v\rangle=\sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}a_{i_1\cdots i_p}b_{i_1\cdots i_p}$$

同时

$$*v=\sum b_{j_1\cdots j_p}*(e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p})$$

假设

$$e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}\wedge e_{j_{p+1}}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}=e_1\wedge\cdots\wedge e_n$$

则有

$$*v=\sum b_{j_1\cdots j_p}\ e_{j_{p+1}}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}$$
$$w\wedge *v=\sum\sum a_{i_1\cdots i_p}\ b_{j_1\cdots j_p}\ e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\wedge e_{j_{p+1}}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}.$$

由于$j_1<\cdots<j_p$，仅当$i_1=j_1$，…，$i_p=j_p$时，$e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\wedge e_{j_{p+1}}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}$才不为零。所以

$$w\wedge *v=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n}a_{j_1\cdots j_p}b_{j_1\cdots j_p}e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_n}$$
$$=\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_p\leqslant n}a_{j_1\cdots j_p}b_{j_1\cdots j_p}e_1\wedge\cdots\wedge e_n$$

所以

$$*(w\wedge *v)=\sum a_{j_1\cdots j_p}b_{j_1\cdots j_p}=\langle w,\ v\rangle$$

同理可证

$$*(v\wedge *w)=\langle w,\ v\rangle \quad \|$$

（2）在流形上的推广

设M是n维紧致定向 Riemann 流形，U是它的一个坐标域，局部坐标是$(x^1,\cdots,\ x^n)$。设M上的Riemann 度量张量是g_{ij}，则

$$ds^2=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^idx^j=(\theta^1)^2+\cdots+(\theta^n)^2.$$

Phaff 形式$\theta^1,\cdots,\theta^n$在M的每一点x的切空间$T_x(M)$的对偶空间$T_x^*(M)$中构成标准正交基。把前面对向量空间V的讨论换成$T_x^*(M)$，则$(e_1,\cdots,e_n)$换成$(\theta^1,\cdots,\theta^n)$。这时

$$\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_p}\ (1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n)$$

构成$\Lambda^p(T_x(M))$的标准正交基。同时我们可以在外代数$\Lambda(T_x(M))$中定义内积：设w、$v\in\Lambda^p(T_x(M))$。

$$w=\sum a_{i_1\cdots i_p}\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_p}$$

$$v=\sum b_{j_1\cdots j_p}\theta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{j_p}$$

$$\langle w,\ v\rangle=\sum a_{i_1\cdots i_p}b_{i_1\cdots i_p}$$

同时我们可以把星形算子的定义推广到$\Lambda(T_x(M))$上，并且得到类似于命题 1 和 2 的性质。

我们还可以考虑坐标域U上的微分形式代数

$$\Lambda(U)=\bigoplus_{p=0}^{n}\Lambda^p(U)$$

并在$\Lambda(U)$中定义内积和星形算子。

定义 2 设$w\in\Lambda^p(U)$，$v\in\Lambda^q(U)$。当$p\neq q$时，$\langle w,v\rangle=0$，当$p=q$时，若

$$w=\sum a_{i_1\cdots i_p}(x)\theta^{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{i_p}$$

$$v=\sum b_{j_1\cdots j_p}(x)\theta^{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta^{j_p}$$

则有

$$\langle w, v \rangle = \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n} a_{i_1 \cdots i_p}(x) b_{i_1 \cdots i_p}(x)$$

$$*: \Lambda^p(U) \to \Lambda^{n-p}(U)$$

定义为

$$*(\theta^{i_1} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_p}) = \theta^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge \theta^{i_n}$$

使

$$[\theta^{i_1}, \cdots, \theta^{i_p}, \theta^{i_{p+1}}, \cdots, \theta^{i_n}] = [\theta^1, \cdots, \theta^n]$$

于是我们又可得类似于命题 1 和 2 的性质。

（3）$\Lambda_0(M)$ 中的内积

对于流形M上的一个微分形式，使此微分形式不为零的点集的闭包称为此微分形式的支集。

$\Lambda_0(M) = \{M$上全体有紧致支集的微分形式$\}$。

再命dV 表示M的体积元素．我们可以在 $\Lambda_0(M)$ 中定义内积。

定义 3　设ω，$\varphi \in \Lambda_0(M)$，则

$$(\omega, \varphi) = \int_M \langle \omega, \varphi \rangle dV$$

称为 $\Lambda_0(M)$ 中的"圆内积"。

容易看出，

$$(\omega, \varphi) = (\varphi, \omega)$$

$$(\lambda_1 \omega_1 + \lambda_2 \omega_2, \varphi) = \lambda_1(\omega_1, \varphi) + \lambda_2(\omega_2, \varphi)$$

其中λ_1、$\lambda_2 \in R$，

$$(\omega, \omega) \geqslant 0$$

而且符号成立的充要条件是$\omega = 0$。

此外，下面的公式是重要的。

$$\begin{aligned}(\omega, \varphi) &= \int_M \langle \omega, \varphi \rangle dV \\ &= \int_M \langle \omega, \varphi \rangle \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n \\ &= \int_M *(\omega \wedge *\varphi) \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n\end{aligned}$$

$$=\int_M \omega\wedge *\varphi$$

类似地，

$$(\omega,\ \varphi)=\int_M \varphi\wedge *\omega$$

命题 3 $(*\omega,\ *\varphi)=(\omega,\ \varphi)$

证明：设ω，$\varphi\in\Lambda_0^p(M)$。则

$$(*\omega,\ *\varphi)=\int_M *\omega\wedge **\varphi$$

$$=(-1)^{p(n-p)}\int_M *\omega\wedge\varphi$$

$$=\int_M \varphi\wedge *\omega$$

$$=(\varphi,\ \omega)\quad \|$$

2. δ算子和Laplace算子

定义 4 对于给定的线性算子T：$\Lambda_0(M)\to\Lambda_0(M)$，如果存在另一个线性算子

$$T^*:\ \Lambda_0(M)\to\Lambda_0(M),$$

使得对于$\forall\alpha$，$\beta\in\Lambda_0(M)$，

$$(T\alpha,\ \beta)=(\alpha,\ T^*\beta)$$

则称T^*是T的伴随算子。

注意 伴随算子是唯一的。因为假设T_1^*、T_2^*都是T的伴随算子，则对于任意的α、$\beta\in\Lambda_0(M)$，

$$(T\alpha,\ \beta)=(\alpha,\ T_1^*\beta)=(\alpha,\ T_2^*\beta)$$

则

$$(\alpha,\ (T_1^*-T_2^*)\beta)=0$$

再由α、β的任意性，得到$T_1^*=T_2^*$。

另外，伴随算子还是相互的，即如果T^*是T的伴随算子，则T也是T^*的伴随算子。

例 1 求$*$的伴随算子。

由于$*$是同构，所以有$*^{-1}$。

$$(*\omega,\ \varphi)=(*\omega,\ **^{-1}\varphi)=(\omega,\ *^{-1}\varphi)$$

例 2 求外微分d的伴随算子。

设$\omega\in\Lambda_0^{p-1}(M)$，$\varphi\in\Lambda_0^p(M)$。

$$(d\omega,\ \varphi)=\int_M d\omega\wedge*\varphi$$
$$=\int_M d(\omega\wedge*\varphi)-(-1)^{p-1}\int_M\omega\wedge d(*\varphi)$$

由于$\omega\wedge*\varphi$有紧致支集K，所以

$$\int_M d(\omega\wedge*\varphi)=\int_K d(\omega\wedge*\varphi)$$
$$=\int_{\partial K}\omega\wedge*\varphi$$
$$=0$$

因此

$$(d\omega,\ \varphi)=(-1)^p\int_M\omega\wedge d*\varphi$$
$$=(-1)^p\int_M\omega\wedge**^{-1}d*\varphi$$

又由于$d*\varphi\in\Lambda_0^{n-p+1}(M)$，所以

$$**(d*\varphi)=(-1)^{(n-p+1)(p-1)}d*\varphi$$

所以

$$*(d*\varphi)=(-1)^{(n-p+1)(p-1)}*^{-1}d*\varphi$$

这样

$$(d\omega,\ \varphi)=(\omega,\ (-1)^p*^{-1}d*\varphi)$$
$$=(\omega,\ (-1)^{np+n+1}*d*\varphi)$$

即d的伴随算子是$(-1)^{n(p+1)+1}*d*$（作用于$\Lambda_0^p(M)$上）。

定义 5 当外微分算子d：$\Lambda_0^{p-1}(M)\to\Lambda_0^p(M)$时，其伴随算子

$$\delta:\ \Lambda_0^p(M)\to\Lambda_0^{p-1}(M)$$

称为上微分算子。

命题 4　δ算子有以下性质：

（1）$\delta\delta=0$；

（2）$(-1)^{p+1}\delta * = * d$（作用于 $\Lambda_0^p(M)$）；

（3）$(-1)^p d * = * \delta$（作用于 $\Lambda_0^p(M)$）。

证明：

（1）对于 $\forall \varphi \in \Lambda_0^p(M)$，$\omega \in \Lambda_0^{p-2}(M)$，

$$(\omega, \delta\delta\varphi)=(d\omega, \delta\varphi)=(dd\omega, \varphi)=0$$

所以

$$\delta\delta=0$$

（2）$(-1)^{p+1}\delta * \varphi$

$$=(-1)^{p+1}(-1)^{n(n-p+1)+1} * d * (*\varphi)$$

$$= * d\varphi$$

（3）$* \delta\varphi=(-1)^{np+n+1} * (* d * \varphi)$

$$=(-1)^{np+n+1}(-1)^{(n-p+1)(p-1)} d * \varphi$$

$$=(-1)^p d * \varphi \quad \|$$

注意　δ算子与流形的定向无关。

定义 6　Laplace 算子 Δ：$\Lambda_0^p(M) \to \Lambda_0^p(M)$为

$$\Delta=(d+\delta)^2=d\delta+\delta d$$

命题 5　Laplace算子有以下性质：

（1）Δ是自伴随算子，即对于$\forall \omega$、$\varphi \in \Lambda_0^p(M)$，

$$(\Delta\omega, \varphi)=(\omega, \Delta\varphi)；$$

（2）Δ算子与d、δ、$*$可交换，即

$$\Delta d=d\Delta, \quad \Delta\delta=\delta\Delta, \quad \Delta * = * \Delta.$$

证明：

（1）
$$(\Delta\omega, \varphi)=(d\delta\omega, \varphi)+(\delta d\omega, \varphi)$$
$$=(\omega, d\delta\varphi)+(\omega, \delta d\varphi)$$
$$=(\omega, \Delta\varphi)$$

（2）
$$\Delta d=(d\delta+\delta d)d=d\delta d=d\Delta$$
$$\Delta\delta=(d\delta+\delta d)\delta=\delta d\delta=\delta\Delta$$

再设$\varphi\in\Lambda_0^p(M)$，根据命题4

$$\Delta*\varphi=(d\delta+\delta d)*\varphi$$
$$=d(-1)^{p+1}*d\varphi+\delta(-1)^p*\delta\varphi$$

因为$d\varphi\in\Lambda_0^{p+1}(M)$，$\delta\varphi\in\Lambda_0^{p-1}(M)$，因此再根据命题4，

$$\Delta*\varphi=(-1)^{p+1}(-1)^{p+1}*\delta d\varphi+(-1)^p(-1)^p*d\delta\varphi$$
$$=*(d\delta+\delta d)\varphi$$
$$=*\Delta\varphi \quad \|$$

根据定义和以上性质，不难验证在R^3中，对于$\Lambda^0(R^3)$来说，

$$\Delta=-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial^2}{(\partial x^i)^2}$$

这与熟知的Laplace算子是一致的。

3. 调和形式

定义7 M为紧致Riemann流形．若$\omega\in\Lambda(M)$，满足$\Delta\omega=0$，则称ω为M上的调和形式。

命题6 设$\omega\in\Lambda_0(M)$，则$\Delta\omega=0$当且仅当$d\omega=0$，$\delta\omega=0$。

证明：如果$d\omega=0$，$\delta\omega=0$，则显然有$\Delta\omega=0$。反之，如果$\Delta\omega=0$，则

$$0=(\Delta\omega,\ \omega)$$
$$=(d\delta\omega,\ \omega)+(\delta d\omega,\ \omega)$$
$$=(\delta\omega,\ \delta\omega)+(d\omega,\ d\omega)$$

因此

$$(d\omega,\ d\omega)=0,\ (\delta\omega,\ \delta\omega)=0$$

即$d\omega=0$，$\delta\omega=0$ $\|$

现在考虑$\Lambda_0(M)$的三个子空间：

$$\Lambda_H=\{\omega\in\Lambda_0(M):\ \Delta\omega=0\}$$
$$\Lambda_d=\{\omega\in\Lambda_0(M):\ 存在\alpha\in\Lambda_0(M)，使d\alpha=\omega\}$$
$$\Lambda_\delta=\{\omega\in\Lambda_0(M):\ 存在\beta\in\Lambda_0(M)，使\delta\beta=\omega\}$$

我们希望证明

定理 1 （Hodge分解定理）$\Lambda_0(M)=\Lambda_H\oplus\Lambda_d\oplus\Lambda_\delta$。

定理的证明来自以下命题。

命题 7 Λ_H、Λ_d、Λ_δ彼此正交。由此推出

$$\Lambda_H\cap\Lambda_d=\{0\},\quad \Lambda_d\cap\Lambda_\delta=\{0\}$$
$$\Lambda_\delta\cap\Lambda_H=\{0\}$$

证明：设$\omega\in\Lambda_H$，$d\alpha\in\Lambda_d$，$\delta\beta\in\Lambda_\delta$，则

$$(\omega,\ d\alpha)=(\delta\omega,\ \alpha)=0$$
$$(\omega,\ \delta\beta)=(d\omega,\ \beta)=0$$
$$(d\alpha,\ \delta\beta)=(dd\alpha,\ \beta)=0$$

所以$\Lambda_H\perp\Lambda_d$，$\Lambda_H\perp\Lambda_\delta$，$\Lambda_d\perp\Lambda_\delta$。 ||

命题 8 设$\omega\in\Lambda_0(M)$，如果$\omega\perp\Lambda_H$，$\omega\perp\Lambda_d$，$\omega\perp\Lambda_\delta$，则$\omega=0$。

证明：由于$\omega\perp\Lambda_d$，所以对于$\forall\alpha\in\Lambda_0(M)$，$(\omega,\ d\alpha)=(\delta\omega,\ \alpha)=0$，因此$\delta\omega=0$。

由于$\omega\perp\Lambda_\delta$，所以对于$\forall\beta\in\Lambda_0(M)$，$(\omega,\ \delta\beta)=(d\omega,\ \beta)=0$。因此$d\omega=0$。

根据命题6，$\Delta\omega=0$，即$\omega\in\Lambda_H$。又知$\omega\perp\Lambda_H$，所以$(\omega,\ \omega)=0$，这就说明$\omega=0$。 ||

Hodge分解定理的证明：根据命题7，我们有

$$\Lambda_0(M)\supset\Lambda_H\oplus\Lambda_d\oplus\Lambda_\delta$$

假设$\Lambda_0(M)=\Lambda_H\oplus\Lambda_d\oplus\Lambda_\delta\oplus\Lambda^\perp$，根据命题8，$\Lambda^\perp=0$，因此定理得证。 ||

推论 1 对于$\forall\omega\in\Lambda_0(M)$，存在唯一的分解：

$$\omega=d\alpha+\delta\beta+\gamma,\quad \gamma\in\Lambda_H$$

推论 2 对于$\forall\omega\in\Lambda_0(M)$，$\varphi\in\Lambda_H$，则存在唯一的$\gamma\in\Lambda_H$，使得

$$(\omega,\ \varphi)=(\gamma,\ \varphi)$$

定义 8 映射H：$\Lambda_0(M)\to\Lambda_H$，使$H\omega=\gamma$。其中$\omega\in\Lambda_0(M)$，$\omega=d\alpha+\delta\beta+\gamma$。则$H$称为投影算子。

显然，$H^2=H$。上面推论2可写成 $(\omega, \varphi)=(H\omega, \varphi)$。

定理 2 设$\omega\in\Lambda_0(M)$，给出一个Poisson方程

$$\Delta\omega=\alpha$$

它有解的充要条件是：$\alpha\perp\Lambda_H$。

证明：**必要性**：若 $\Delta\omega=\alpha$有解ω，则对于$\forall\beta\in\Lambda_H$，

$$(\alpha, \beta)=(\Delta\omega, \beta)=(\omega, \Delta\beta)$$
$$=0$$

这就说明$\alpha\perp\Lambda_H$。

充分性：因为$\alpha\perp\Lambda_H$，由Hodge分解定理，必有

$$\alpha=d\alpha_1+\delta\beta_1$$

设 $\alpha_1=d\alpha_2+\delta\beta_2+\gamma_2$，$d\alpha_1=d^2\alpha_2+d\delta\beta_2+d\gamma_2=d\delta\beta_2$。再设$\beta_2=d\alpha_3+\delta\beta_3+\gamma_3$，$\delta\beta_2=\delta d\alpha_3+\delta^2\beta_3+\delta\gamma_3=\delta d\alpha_3$。所以

$$d\alpha_1=d\delta d\alpha_3=\Delta(d\alpha_3)$$

同理，设$\beta_1=d\alpha_4+\delta\beta_4+\gamma_4$，则$\delta\beta_1=\delta d\alpha_4$，再设$\alpha_4=d\alpha_5+\delta\beta_5+\gamma_5$。则$d\alpha_4=d\delta\beta_5$。因此

$$\delta\beta_1=\delta d\delta\beta_5=\Delta\delta\beta_5$$

所以

$$\alpha=d\alpha_1+\delta\beta_1=\Delta(d\alpha_3+\delta\beta_5)$$

即

$$\omega=d\alpha_3+\delta\beta_5$$

是方程的解。 ‖

推论 1 Poisson方程如有解，则差一调和形式，解是唯一的。

推论 2 $\Delta|\Lambda_H^{\perp}$：$\Lambda_H^{\perp}\to\Lambda_H^{\perp}$是向量空间的同构。

定义 9 映射G：$\Lambda_0(M)\to\Lambda_H^{\perp}$，使得对于$\forall\omega\in\Lambda_0(M)$

$$G\omega=\Delta^{-1}(\omega-H\omega)$$

则称G为Green算子。

不难看出

$$\omega=H\omega+\Delta G\omega$$

$$\omega = H\omega + d(\delta G\omega) + \delta(dG\omega)$$

这就是ω在子空间 Λ_H、Λ_d、Λ_δ 上的分解。

命题 9 如果线性算子 T：$\Lambda_0(M) \to \Lambda_0(M)$ 满足条件$T\Delta = \Delta T$，则T与H和G也可交换，即

$$TH = HT,\ TG = GT$$

证明：

（1）已知$T\Delta = \Delta T$，$\omega = H\omega + \Delta G\omega$，

则

$$T\omega = TH\omega + T\Delta G\omega$$
$$= TH\omega + \Delta(TG\omega)$$

注意

$$\Delta(TH\omega) = T\Delta(H\omega) = 0$$

即$TH\omega \in \Lambda_H$。因此$HTH\omega = TH\omega$。这样

$$HT\omega = TH\omega + H\Delta(TG\omega)$$

又因为

$$\Delta(TG\omega) = d\delta TG\omega + \delta dTG\omega \in \Lambda_H^{\perp}$$

所以

$$H\Delta(TG\omega) = 0$$

最后得到

$$HT\omega = TH\omega$$

（2）对于$\forall T\omega$，$\Delta(GT\omega) = T\omega - HT\omega$　　　　（*）

又$\omega = H\omega + \Delta G\omega$，所以

$$T\omega = TH\omega + T\Delta G\omega$$

即

$$\Delta(TG\omega) = T\omega - HT\omega \qquad (*)'$$

由于$GT\omega$，$TG\omega \in \Lambda_H^{\perp}$，方程$\Delta\alpha = T\omega - HT\omega$的解在$\Lambda_H^{\perp}$中是唯一的，比较上面二式（*）和（*）′，得

$$GT\omega = TG\omega \quad \|$$

推论 因$*$、d、δ与Δ可交换，则这三种算子与H、G也

可交换。

4. Hodge定理

定理 3 在C^∞定向、紧致、n维Riemann流形M的每一个de Rham上同调类中存在唯一的调和形式。

证明：设$[\omega]\in H^p_{dR}(M)$，则$d\omega=0$。

$$\begin{aligned}\omega&=H\omega+d\delta G\omega+\delta dG\omega\\&=H\omega+d\delta G\omega+\delta Gd\omega\\&=H\omega+d(\delta G\omega)\end{aligned}$$

所以$H\omega$与ω是de Rham上同调的。若$\omega'\in[\omega]$，即$\omega-\omega'=d\alpha$，则因为

$$\omega'=H\omega'+d(\delta G\omega')$$

所以

$$\omega-\omega'=(H\omega-H\omega')+[d(\delta G\omega)-d(\delta G\omega')]$$

即

$$d\alpha=(H\omega-H\omega')+[d(\delta G\omega-\delta G\omega')]$$

所以$H\omega=H\omega'$。这就证明了存在性和唯一性。 ‖

第二部分 黎曼几何

第五章 线性联络

§5.1 线性联络

设M是一个n维C^∞流形，$P\in M$，T_PM是M在点P的切空间。命U是M中围绕P的一个坐标域，局部坐标是$(x^1, \cdots, x^n)$，则$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_P, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)_P\right\}$构成$T_PM$的一组基，并且$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$是$U$上的局部标架场。

TM是M的切丛，$C^\infty(M, TM)$（或$\Gamma(T(M))$）是TM的光滑截面空间。给出M上一光滑向量场$X\in C^\infty(M, TM)$，局部地，在坐标域U上，它可以表示成

$$X|_U=\sum_{i=1}^{n} X^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

其中$X^i(x)$是U上的C^∞函数。

定义1 C^∞流形M上一联络是一个微分算子

$$\nabla: C^\infty(M, TM)\times C^\infty(M, TM)\to C^\infty(M, TM)$$

$$(X, Y)\mapsto\nabla_XY$$

使得对于$\forall X$、Y、$Z\in C^\infty(M, TM)$，$r\in R$，$f\in C^\infty(M)$。

(a) $\nabla_X(Y+Z)=\nabla_XY+\nabla_XZ$；

(b) $\nabla_{X+Y}(Z)=\nabla_XZ+\nabla_YZ$，$\nabla_{rX}Y=r\nabla_XY$；

(c) $\nabla_X(fY)=(Xf)Y+f\cdot\nabla_XY$。

∇称为M上的线性联络或切丛$C^\infty(M, TM)$上的联络，∇_XY称

为Y在X方向上的协变微商。

局部地，在坐标域U上，设向量场 $\nabla_{\partial/\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$分解为

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\sum_k \Gamma^k_{ij}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

其中$\Gamma^k_{ij}\in C^\infty(U)$ 称为线性联络∇在坐标域U上的 Christoffel 符号或 Christoffel 系数。

实例

（1）**平坦欧氏空间**　命$M=R^n$,坐标是$(x^1,\cdots,x^n)$, $\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$是$R^n$上的标架场。设$Y\in C^\infty(R^n,TR^n)$, $Y=\sum_i Y^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，其中$Y^i\in C^\infty(R^n)$。定义$R^n$上一联络$\nabla$为：$\nabla_X Y=\sum_i(XY^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$,容易验证，这样定义的联络$\nabla$满足条件(a)－(c)，因此是一个线性联络，注意

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=0$$

即$\Gamma^k_{ij}=0$，i，j，$k=1$，$\cdots$，n，

因此∇称为**平坦联络**。上面定义的协变微商$\nabla_X Y$事实上就是通常的矢值函数的方向导数。

（2）**平行化流形**　一个n维C^∞流形M，如果在它上面可以定义n个处处线性无关的向量场，即标架场$\{X_1,\cdots,X_n\}$，则M称为**平行化流形**。M上任一向量场$X\in C^\infty(M,TM)$可以表示成$X=\sum_i f^iX_i$，其中$f^i\in C^\infty(M)$。在平行化流形上定义一线性联络∇，它满足条件（a）－（c）并且

$\nabla_{X_i}(X_j)=0$，（i，$j=1$，$\cdots$，n）则对于$\forall X$，$Y\in C^\infty(M,TM)$，

$$\nabla_Y(X) = \sum_i (Yf^i)X_i$$

所以▽是平行化流形M上的平坦联络。

（3）Poincare′双曲上半平面　命

$$M = H = \{(x, y) \in R^2 | y > 0\}$$

因为H只有一个坐标域，我们可以用Christoffel符号来定义H上的线性联络，它定义为

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21} = -\Gamma^2_{11} = -\Gamma^2_{22} = -\frac{1}{y}, \text{其它}\Gamma^k_{ij} = 0\text{。}$$

定理1　任何C^∞流形M上一定存在线性联络。

证明：设流形M的坐标覆盖是$\mathscr{U} = \{U_\alpha\}$，相应地有一组单位分解$\{\varphi_\alpha\}$，$\varphi_\alpha$的支集$\subset U_\alpha$，并且

$$0 \leqslant \varphi_\alpha \leqslant 1, \quad \sum_\alpha \varphi_\alpha = 1$$

由于在每一个坐标域U_α上存在着局部标架场，因此是可平行化的并且在U_α上存在平坦线性联络∇_α，于是我们可以在M上整体地定义线性联络如下：

$$\nabla = \sum_\alpha \varphi_\alpha \nabla_\alpha \quad \|$$

定义2　设▽是C^∞流形M上的一个线性联络，则存在M上的（1，2）型张量场T定义为

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

局部地，在坐标域U上，命$X = \frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$，则

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_k (\Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji})\frac{\partial}{\partial x^k}$$

张量场T称为线性联络▽的挠率。$T = 0$时，▽称为是无挠率的。局部地，对于无挠率线性联络，它的Christoffel系数满足

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}, \quad i, j, k = 1, \cdots, n$$

因此无挠率线性联络又称为**对称线性联络**。

引理1 向量场$\nabla_X Z$在P点的值$(\nabla_X Z)_P$只依赖于切向量$X_P \in T_P M$，即与X_P的扩充无关。

证明：设X_P扩充成另一向量场Y。$Y_P = X_P$，命$W = X - Y$，则$W_P = 0$。设U是围绕P的一个坐标域，命

$$W|_U = \sum_i W^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}，\quad W^i(x) \in C^\infty(U)$$

其中$W^i(P) = 0$。

$$\nabla_W Z|_U = \sum_i W^i(x) \nabla_{\partial/\partial x^i}(Z),$$

$$(\nabla_W Z)_P = \sum_i W^i(P)(\nabla_{\partial/\partial x^i}(Z))_P = 0$$

$$\therefore \quad (\nabla_X Z)_P - (\nabla_X Y)_P = (\nabla_{X-Y}(Z))_P = (\nabla_W(Z))_P$$
$$= 0 \qquad \|$$

但是协变微商$\nabla_X Y$对于Y的情况要复杂得多，它依赖于Y沿X的积分曲线的值。

定义3 设α：$I \to M$是M上一条光滑曲线，沿曲线α的向量场Z是映射：$I \to T(M)$，使得$t \in I \mapsto Z_{\alpha(t)} \in T_{\alpha(t)} M$并且对于$M$上的$C^\infty$函数$f$，$Z_{\alpha(t)} f$是$\alpha(I) \subset M$上的$C^\infty$函数。

定义4 给出M上一条光滑曲线α：$I \to M$，α的切向量场T_α定义如下：

$$T_{\alpha(t)} = (\alpha_*)_t \left(\frac{d}{dt}\right)$$

有时我们把T_α简写为T。

局部地，在坐标域U中，设曲线α的局部坐标表示是$\alpha^i = x^i \circ \alpha$，则

$$T_{\alpha(t)} = \sum_i \frac{d\alpha^i(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)}$$

因此我们可以形式地把 T_α 看成 $d\alpha/dt$。

现在我们希望定义沿曲线 α 的切向量场 T 的协变微商 $\nabla_T Y$ 在 $\alpha(t_0)$ 的值。为此，取 $T_{\alpha(t_0)}$ 扩充为 M 上的向量场 X，$X_{\alpha(t_0)}=T_{\alpha(t_0)}$，则根据引理 1，我们可以定义

$$(\nabla_T Y)_{\alpha(t_0)}=(\nabla_X Y)_{\alpha(t_0)}$$

实例 设 $M=R^2$，α 是单位开圆：$\alpha(t)=(\cos t,\ \sin t)$，$0<t<2\pi$，命 $e_1=\partial/\partial x$，$e_2=\partial/\partial y$，$Y=ye_1-xe_2$，因为 $T=-\sin te_1+\cos te_2$，所以可取 R^2 上的向量场 $X=-ye_1+xe_2$，使得 $X|_\alpha=T$。

$$\begin{aligned}\nabla_T Y=\nabla_X Y|_\alpha&=(X_y)_\alpha e_1-(X_x)_\alpha e_2\\&=(xe_1+ye_2)_\alpha=\cos te_1+\sin te_2\end{aligned}$$

引理2 设 $f\in C^\infty(M)$，α：$I\to M$ 是光滑曲线使得 $fo\alpha=$ 常数。则 $T_\alpha f=0$。

证明：$T_\alpha f=\alpha_*\left(\frac{d}{dt}\right)f=\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)=0$ ||

引理3 命 α：$I\to M$ 是一条光滑曲线，Y、$Z\in C^\infty(M,TM)$ 使得 $Y_{\alpha(t)}=Z_{\alpha(t)}$，$\forall t\in I$。则沿曲线 α 有 $\nabla_{T_\alpha}Y=\nabla_{T_\alpha}Z$。

证明：命 $W=Y-Z$，则 $W_{\alpha(t)}=0$，求证 $\nabla_T W=0$。设 U 是围绕 $\alpha(t_0)$ 的坐标域，

$$W|_U=\sum_i W^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i},\quad W^i(x)\in C^\infty(U)$$

其中 $W^i(\alpha(t))=0$。根据联络 ∇ 的性质 (c)，

$$\nabla_T W|_U=\sum_i(T_\alpha W^i)\frac{\partial}{\partial x^i}+\sum_i W^i.\ \nabla_T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right).$$

因为 $W^i\circ\alpha=0$，所以 $T_\alpha W^i=0$，又因为 $W^i(\alpha(t))=0$，所以

$$\nabla_T W_{\alpha(t)}=0\quad ||$$

附记：这引理说明，$(\nabla_X Y)_P$ 依赖于向量场 Y 沿向量场 X 的过 P

点的积分曲线的值。

现在我们应用引理1和引理2来解决子流形的诱导联络问题。设N是一个微分流形，其上已给定了线性联络$\overline{\nabla}$；M是N的子流形，现在我们希望用N上的线性联络$\overline{\nabla}$来定义子流形M上的联络。任给X、$Y\in C^\infty(H,TM)$，把它们扩充成N上的向量场$\widetilde{X}$和$\widetilde{Y}$，定义

$$\overline{\nabla}_X Y=\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$$

根据引理1，$\overline{\nabla}_X Y$与X的扩充$\widetilde{X}$的选择无关；再根据引理2，$\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$与$\widetilde{Y}$沿$\widetilde{X}$的积分曲线上的值有关。设$P\in M$，$\widetilde{X}$的过$P$点的积分曲线即$X$的过$P$点的积分曲线$\alpha\subset M$，所以$(\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})_P$只与$\widetilde{Y}$沿曲线$\alpha$的值即$Y$的沿$\alpha$的值有关，与扩充$\widetilde{Y}$的选择无关。所以，上面定义的$\overline{\nabla}_X Y$是有意义的。

但是$(\overline{\nabla}_X Y)_P=(\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})_P$不一定属于$T_PM$，所以我们定义

$(\nabla_X Y)_P=(\overline{\nabla}_X Y)_P$或$(\overline{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y})_P$在$T_PM$上的投影。

于是我们定义了N的子流形M上的线性联络∇，称为N上的线性联络$\overline{\nabla}$在子流形M上的诱导联络。

实例 给出C^∞函数f：$R^{n+1}\to R$，设M是R^{n+1}中由f确定的超曲面。M的单位法向量场是

$$n=\mathrm{grad}f/|\mathrm{grad}f|$$

设$\overline{\nabla}$是R^{n+1}中的平坦线性联络，我们定义超曲面M上的联络如下：

$$\nabla_X Y=\overline{\nabla}_X Y-\langle\overline{\nabla}_X Y,\ n\rangle n$$

因为$\langle n,\ n\rangle=1$，所以$\langle\nabla_X Y,\ n\rangle=0\Rightarrow\nabla_X Y\in C^\infty(M,TM)$。可以验证，这样定义的算子$\nabla$满足条件（$a$）－（$c$），所以$\nabla$是超曲面上的线性联络，它是$R^{n+1}$中的平坦线性联络在$M$上的诱导联络。

§5.2 平行移动

定义5 给出曲线α：$I\to M$，Y是沿曲线α的向量场，如果

$$\nabla_{T_\alpha} Y = 0$$

则称Y是沿曲线α平行的。

实例 设R^n是平坦欧氏空间，α是R^n中一条曲线，Y是沿α的向量场。命$\{e_1, \cdots, e_n\}$是R^n的标准基，$Y = \sum_i Y^i e_i$。

$$\nabla_{T_\alpha} Y = \sum_i (T_\alpha Y^i) e_i = 0 \Longleftrightarrow T_\alpha Y^i = 0$$

$$T_\alpha Y^i = \alpha_*\left(\frac{d}{dt}\right) Y^i = \frac{d}{dt}(Y^i \circ \alpha) = 0$$

$$\Longleftrightarrow Y^i[\alpha(t)] = \text{常数。}$$

所以，Y沿曲线α是平行的$\Longleftrightarrow$$Y$沿曲线$\alpha$是常向量场。

定理2(Levi-Civita, 1917) 给出曲线α: $[c, d] \to M$，设$\alpha(c) = P \in M$，$\tilde{Y} \in T_P M$，则存在唯一沿曲线α平行的向量场Y使得$Y_{\alpha(c)} = Y_P = \tilde{Y}$。

证明：考虑围绕P的坐标域U，沿曲线α的向量场Y可以局部地表示成

$$Y = \sum_i Y^i(\alpha(t)) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)}$$

$$\nabla_{T_\alpha} Y = \sum_i \left[\frac{dY^i(\alpha(t))}{dt} \frac{\partial}{\partial x^i} + Y^i(\alpha(t)) \nabla_{T_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right]$$

$$= \sum_k \left[\frac{dY^k(\alpha(t))}{dt} + \sum_{i,j} Y^i(\alpha(t)) \frac{d\alpha^j}{dt} \Gamma^k_{ji}\right] \frac{\partial}{\partial x^k}$$

所以向量场沿曲线α平行当且仅当它的分量Y^i满足微分方程组

$$\frac{dY^k}{dt} + \sum_{i,j} Y^i \frac{d\alpha^j}{dt} \Gamma^k_{ji} = 0 \quad (k = 1, \cdots, n)$$

给出初始条件

$$Y^k(\alpha(c)) = \tilde{Y}^k,$$

则上述方程组局部地存在唯一解$Y^k(\alpha(t))$，$(k = 1, \cdots, n)$，

因为$[c, d]$是紧致的，因此可以把局部解逐步扩充到整个$[c, d]$上。‖

实例 $M=H=$Poincare′双曲上半平面，$\alpha(t)=(t, 1)$，$P=\alpha(0)=(0, 1)$。命$\widetilde{Y}=\frac{\partial}{\partial x^2}$，则$\widetilde{Y}^1=0$，$\widetilde{Y}^2=1$，定理2中的微分方程组变成

$$\begin{cases}\dfrac{dY^1}{dt}-Y^1\dfrac{d\alpha^2}{dt}\cdot\dfrac{1}{\alpha^2(t)}-Y^2\dfrac{d\alpha^1}{dt}\cdot\dfrac{1}{\alpha^2(t)}=0\\[2ex]\dfrac{dY^2}{dt}+Y^1\dfrac{d\alpha^1}{dt}\cdot\dfrac{1}{\alpha^2(t)}-Y^2\dfrac{d\alpha^2}{dt}\cdot\dfrac{1}{\alpha^2(t)}=0\end{cases}$$

或

$$\frac{dY^1}{dt}-Y^2=0, \quad \frac{dY^2}{dt}+Y^1=0$$

根据初始条件：$Y^1(0)=\widetilde{Y}^1=0$，$Y^2(0)=\widetilde{Y}^2=1$，解上述方程组得：

$$Y^1=\sin t, \quad Y^2=\cos t$$

$$\therefore \quad Y(t)=\sin t\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{\alpha(t)}+\cos t\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{\alpha(t)}$$

定义6 设$\alpha: I\to M$是光滑曲线，$P=\alpha(0)$，对于$\forall\,\widetilde{Y}\in T_PM$，$Y$是沿曲线$\alpha$并且与$\widetilde{Y}$平行的向量场。定义映射$P^\alpha: T_PM\to T_{\alpha(t)}M$如下：

$$P^\alpha(\widetilde{Y})=Y_{\alpha(t)}$$

则P^α称为沿曲线α的平行移动。

定理3 P^α是向量空间的同构。

证明：设$\{e_1, \cdots, e_n\}$是T_PM的一组基，$\widetilde{Y}=\sum_i \widetilde{Y}^i e_i$，命$\{P^\alpha(e_1), \cdots, P^\alpha(e_n)\}$是$T_{\alpha(t)}M$的一组基，$Y_{\alpha(t)}=\sum_i Y^i(P^\alpha(e_i))$。

因为向量场Y沿曲线α平行，所以$\nabla_{T_\alpha}Y=0$，又因为$\nabla_{T_\alpha}(P^\alpha(e_i))=0$，所以

$$\nabla_{T_\alpha} Y = \sum_i (T_\alpha Y^i)(P^\alpha(e_i)) = 0$$

$\Rightarrow T_\alpha Y^i = 0$ 或 $Y^i \circ \alpha =$ 常数， $i = 1, \cdots, n$

于是

$$Y^i = \widetilde{Y}^i,\ (i = 1, \cdots, n)$$

容易看出，映射

$$P^\alpha:\ \widetilde{Y} = \sum_i \widetilde{Y}^i e_i \rightarrow Y = \sum_i Y^i(P^\alpha(e_i))$$

是向量空间的同构。‖

实例 同上例，

$$P^\alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right) = \sin t\left(\frac{\partial}{\partial x^1}\right)_{(t,1)} + \cos t\left(\frac{\partial}{\partial x^2}\right)_{(t,1)}$$

下面我们要指出：流形上的平行移动反过来确定一联络。

定理4 命 $P^{\alpha(t)}$： $T_{\alpha(0)}M \rightarrow T_{\alpha(t)}M$ 是沿曲线 α 的平行移动，则

$$(\nabla_{T_\alpha} Y)_{\alpha(0)} = \lim_{t\rightarrow 0} \frac{1}{t}[(P^{\alpha(t)})^{-1}(Y_{\alpha(t)}) - Y_{\alpha(0)}]$$

证明：命 Z_s 是唯一沿曲线 α 平行的向量场使得 $(Z_s)_{\alpha(0)} = (P^{\alpha(s)})^{-1}(Y_{\alpha(s)})$。设 U 是围绕 $\alpha(0)$ 的坐标域，命

$$(Z_s)_{\alpha(t)} = \sum_i Z_s^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)}$$

$$T_{\alpha(t)} = \sum_i \left(\frac{d\alpha^i}{dt}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)}$$

$$Y_{\alpha(t)} = \sum_i Y^i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)}$$

因为 Z_s 是沿 α 平行的，所以

$$\frac{dZ_s^k}{dt} + \sum \frac{d\alpha^i}{dt}\cdot Z_s^j(t)\Gamma_{ji}^k(\alpha(t)) = 0,$$

$$k = 1, \cdots, n$$

$$Z_s^k(s)=Y^k(s)$$

根据中值定理，

$$Z_s^k(s)=Z_s^k(0)+sZ_s^{k\prime}(\xi_k),\ \text{对于某个}\ 0<\xi_k<s.$$

所以$\frac{1}{s}[(P^{\alpha(s)})^{-1}Y_{\alpha(s)}-Y_{\alpha(0)}]$的第 k 个分量是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{s}[Z_s^k(0)-Y^k(0)]\\
&=\frac{1}{s}[Z_s^k(s)-sZ_s^{k\prime}(\xi_k)-Y^k(0)]\\
&=-Z_s^{k\prime}(\xi_k)+\frac{1}{s}[Z_s^k(s)-Y^k(0)]\\
&=\sum_{i,j}\frac{d\alpha^i}{dt}(\xi_k)Z_s^j(\xi_k)\Gamma_{ji}^k(\alpha(\xi_k))\\
&\quad+\frac{1}{s}[Y^k(s)-Y^k(0)]
\end{aligned}$$

命 $s\to 0$，则同时有 $\xi_k\to 0$，上式变成

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j}\frac{d\alpha^i}{dt}(0)Z_0^j(0)\Gamma_{ji}^k(\alpha(0))+\frac{dY^k}{dt}(0)\\
&=\sum_{i,j}\frac{d\alpha^i}{dt}(0)Y^j(0)\Gamma_{ji}^k(\alpha(0))+\frac{dY^k}{dt}(0)\\
&=(\nabla_{T_\alpha}Y)\ \text{的第}\ k\ \text{个分量.}
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}[(P^{\alpha(s)})^{-1}(Y_{\alpha(s)})-Y_{\alpha(0)}]=\nabla_{T_\alpha}Y.\ \|$$

§5.3 线性联络的测地线

定义7 M上一条曲线α称为（对于联络∇的）测地线，如果

$$\nabla_{T_\alpha}T_\alpha=0$$

局部地，在坐标域U中，测地线的方程是

$$\frac{d^2\alpha^k}{dt^2}+\sum_{i,j}\Gamma^k_{ji}\frac{d\alpha^i}{dt}\ \frac{d\alpha^j}{dt}=0.\ (k=1,\ \cdots,\ n)$$

定理5 命M是一带有线性联络∇的C^∞流形，再命$P\in M$，$X_P\in T_PM$，则局部地，存在唯一测地线α：$(-\varepsilon,\ \varepsilon)\to M$使得

$$\alpha(0)=P,\ \frac{d\alpha}{dt}(0)=X_P$$

证明： 根据常微分方程的解的存在和唯一定理。‖

实例： 命M＝Poincare′上半平面H，它的测地线方程是

$$\frac{d^2\alpha^1}{dt^2}-\frac{2}{\alpha^2(t)}\ \frac{d\alpha^1}{dt}\ \frac{d\alpha^2}{dt}=0$$

$$\frac{d^2\alpha^2}{dt^2}+\frac{1}{\alpha^2(t)}\left(\frac{d\alpha^1}{dt}\right)^2-\frac{1}{\alpha^2(t)}\left(\frac{d\alpha^2}{dt}\right)^2=0$$

它的解是

$$\alpha^1(t)=a+\tanh(rt),\ \alpha^2(t)=b\operatorname{sech}(rt),$$

$$\text{或}\alpha^1(t)=c,\ \alpha^2(t)=d\cdot e^{pt}$$

第一类测地线是圆心为（a，0）、半径为$|b|$的上半圆

$$(\alpha^1(t)-a)^2+(\alpha^2(t)-0)^2=b^2,\ \alpha^2(t)>0$$

第二类测地线是垂直于x轴的半直线。

H是经典双曲几何的模型，测地线就是它的“直线”。在这个模型中欧几里得第五公设不成立，过直线外一点可以作无数条直线与给定的直线不相交。

第六章　黎曼度量与黎曼联络

§6.1　黎 曼 度 量

设M是一个n维C^∞流形，$P\in M$。

定义1　M上的度量场g是一映射，它使每一点$P\in M$对应一函数满足以下条件：

（a）双线性：$g_P(aX_1+bX_2,\ Y)=ag_P(X_1,\ Y)+bg_P(X_2,\ Y)$；

（b）对称性：$g_P(X,\ Y)=g_P(Y,\ X)$；

（c）正定性：$g_P(X,\ X)>0$，当$X\neq 0$。

这些条件等价于说：g在M的每一点P的切空间T_PM中定义了一内积。

定义2　对于$\forall X$、$Y\in C^\infty(M,\ TM)$，M上的度量场g定义了M上的实值函数$g(X,\ Y)$

$$g(X,\ Y)_{(P)}=g_P(X_P,\ Y_P)$$

如果$g(X,\ Y)\in C^\infty(M)$，则我们称g为M上的**黎曼度量**。

定义了黎曼度量g的C^∞流形M称为**黎曼流形**，记成(M,g)。设U是M上一坐标域，局部坐标是$(x^1,\ \cdots,\ x^n)$，则g在U上的限制g_U对应于n^2个实值C^∞函数：

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

定义3　设N和M是C^∞流形，φ：$N\to M$是C^∞映射，给出M上的黎曼度量g_M，它确定了N上的一黎曼度量$g_N=\varphi^*g_M$如下：

$$g_N(X,Y)=\varphi^*g_M(X,Y)=g_M(\varphi_*X,\ \varphi_*Y)$$

g_N称为N上由g_M所诱导的度量，简称为**诱导度量**。

实例

（1）设$M=R^n$，命g是欧氏内积$\langle\ ,\ \rangle$，$\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}$是欧氏空间的标准正交基。再命$P\in M$，T_PM的标准正交基是$\{(e_1)_P,\ \cdots,\ (e_n)_P\}$。设$X_P$、$Y_P\in T_PM$，则

$$X_P=\sum_i a^i(e_i)_P,\quad Y_P=\sum_j b^j(e_j)_P$$

$$g_P(X_P,\ Y_P)=\langle X_P,\ Y_P\rangle=\sum_{i,j}a^ib^j\langle e_i,\ e_j\rangle_P$$

$$=\sum_i a^ib^i$$

由于这个内积满足条件（a）-（c），因此它是R^n中的黎曼度量，称为**欧氏度量**，与欧氏度量相应的实值C^∞函数g_{ij}是常函数：

$$g_{ij}(P)=g_P((e_i)_P,\ (e_j)_P)=\langle e_i,\ e_j\rangle_P=\delta_{ij}$$

（2）设N是黎曼流形M的子流形，则存在一一浸入φ：$N\to M$，于是M上的黎曼度量g_M诱导了N上的黎曼度量$g_N=\varphi^*g_M$，使N也变成一个黎曼流形，由于φ是一一的，我们可以把N和$\varphi(N)$等同起来，这时g_N变成g_M在N上的限制：

$$g_N=g_M|_N$$

注意　黎曼流形的子流形上的黎曼度量不是唯一的，例如在黎曼流形M的子流形N上，除了诱导度量$\varphi^*g_M=g_M|_N$以外，还存在其它黎曼度量，例如：

设$M=$Poincaré双曲上半平面$H\subset R^2$，H上除了R^2的欧氏度量的诱导度量以外，还存在罗氏度量，它定义的内积是

$$g_P(X_P,\ Y_P)=\frac{1}{y^2}\langle X_P,\ Y_P\rangle$$

其中y是P点的纵坐标。容易验证，上述度量满足条件（a）-（c），所以是M上的另一个黎曼度量。

如果$M=$高维双曲空间$H^n=\{x\in R^n;\ |x|<1\}$，它只有一

个坐标系，所以可以用下列n^2个C^∞实值函数来定义它的黎曼度量：

$$g_{ij}(x)=\frac{4a^2\delta_{ij}}{(1-|x|^2)^2},\ \forall x\in M,\ a\in R$$

显然它不同于R^n的欧氏度量在H^n上的诱导度量δ_{ij}。

附记 H^2是经典双曲几何的另一个模型，称为Poincaré实圆，它与Poincaré上半平面差一反演。

定理1 任何C^∞流形上总存在一个黎曼度量。

证明：设M是n维C^∞流形，$\mathscr{U}=\{U_\alpha\}$是它的坐标覆盖，坐标映射是φ_α：$U_\alpha\to R^n$，相应的单位分解是$\{\Psi_\alpha\}$。R^n上的欧氏度量是$G(X,\ Y)=\langle X,\ Y\rangle$，它在$U_\alpha$上的诱导度量是$g_\alpha=\varphi_\alpha^*G$，于是我们得到$M$上的一个整体黎曼度量$g=\Sigma\Psi_\alpha g_\alpha$。‖

给出一个黎曼流形（M，g），g_P确定了切空间T_PM中的内积。于是我们可以计算T_PM中的切向量的长度和夹角如下：

$$|X_P|=\sqrt{g_P(X_P,\ X_P)},\ \forall X_P\in T_PM$$

$$\cos(X_P,\ Y_P)=\frac{g_P(X_P,\ Y_P)}{|X_P|\cdot|Y_P|},\ \forall X_P、Y_P\in T_PM$$

因为$|\cos\theta|<1$，我们得到Schwarz不等式

$$|g_P(X_P,\ Y_P)|\leqslant|X_P|\cdot|Y_P|$$

有了黎曼度量g，我们可以定义黎曼流形（M，g）上曲线的长度如下：

定义4 设α：$[a,\ b]\to M$，$t\mapsto\alpha(t)$是M上逐段光滑曲线，$T_\alpha=\alpha_*\left(\frac{d}{dt}\right)$是$\alpha$的切向量场，则曲线$\alpha$的长度定义为：

$$L(\alpha)=\int_a^b\sqrt{g(T_\alpha,\ T_\alpha)}dt$$

附记 曲线α的长度定义与它的参数选择无关。

证明：设$t=\Psi(s)$，$a=\Psi(c)$，$b=\Psi(d)$，

$$\int_a^b\sqrt{g(T_\alpha,\ T_\alpha)}dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{g\left(\alpha_* \frac{d}{dt},\ \alpha_* \frac{d}{dt}\right)}dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{g\left(\alpha_*\left(\frac{ds}{dt} \cdot \frac{d}{ds}\right),\ \alpha_*\left(\frac{ds}{dt} \quad \frac{d}{ds}\right)\right)}dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 g\left(\alpha_* \frac{d}{ds},\ \alpha_* \frac{d}{ds}\right)}dt$$

$$=\int_c^d \sqrt{g\left(\alpha_* \frac{d}{ds},\ \alpha_* \frac{d}{ds}\right)}ds. \quad \|$$

定义5 设黎曼流形M是连通的，在M中引进距离d如下：对于$\forall P,\ Q \in M$，定义

$d(P,Q)=\text{Inf}\ L(\alpha)=$连结$P$和$Q$的逐段光滑曲线$\alpha$的长度$L(\alpha)$的下确界，这个距离满足下列条件：

（1）正定性：$d(P,\ Q)\geqslant 0$，而且$d(P,\ Q)=0$当且仅当$P=Q$；

（2）对称性：$d(P,\ Q)=d(Q,\ P)$；

（3）三角不等式：$d(P,\ Q)\leqslant d(P,\ R)+d(R,Q)$.

因此距离d使M成为一个度量空间.

定理2 n维连通黎曼流形M的度量拓扑重合于流形的拓扑.

证明：M上的距离d确定了M的度量拓扑，它的开集是距离d所确定的ε-邻域；另一方面，M的微分结构$\{(U_\alpha,\ \varphi_\alpha)\}$确定了$M$的流形拓扑，它的开集由$\varphi_\alpha$：$U_\alpha \to R^n$从$R^n$中的开集诱导而得.

命U是M的坐标域，局部坐标是$(x^1,\ \cdots,\ x^n)$，$P\in U$是坐标系的原点. 对于$\forall Q\in U$，命

$$d(Q)=d(P,\ Q),\quad D(Q)=\sqrt{\sum_i [x^i(Q)]^2},$$

则$d(Q)$确定了M的度量拓扑，$D(Q)$确定了M的流形拓扑。选$a>0$使得$A=\{Q\in U:\ D(Q)\leqslant a\}\subset U$，再考虑紧致集$B=\{(Q,\ X_Q):\ Q\in A,\ \sum_{i=1}^{n}[dx^i(X_Q)]^2=1\}\approx A\times S^{n-1}$，在$B$上定义范数如下：

$$|X_P|=\left\{\sum_{i,j}g_{ij}(Q)dx^i(X_Q)dx^j(X_Q)\right\}^{1/2}$$

它在紧致集B上取极大值R和极小值r。

命α是A中的逐段光滑曲线使得

$$\alpha(0)=P,\ \alpha(a)=Q,\ (\alpha(t),\ T_\alpha)\in B$$

$$L(\alpha)=\int_0^a\sqrt{g(T_\alpha,\ T_\alpha)}\,dt\geqslant ra\geqslant rD(Q)$$

再命β是A中另一条逐段光滑的曲线，它的方程是

$$X^i(\beta(t))=\frac{tX^i(Q)}{D(Q)}$$

当$t=D(Q)$时$\beta(t)$是终点Q，所以

$$L(\beta)=\int_0^{D(Q)}\sqrt{g(T_\beta,\ T_\beta)}\,dt\leqslant R\cdot D(Q)$$

$$d(Q)=d(P,\ Q)=\operatorname*{Inf}_{\alpha}L(\alpha)\geqslant r\cdot D(Q)$$

$$d(Q)=d(P,\ Q)=\operatorname*{Inf}_{\beta}L(\beta)\leqslant L(\beta)\leqslant R\cdot D(Q)$$

$$\therefore\quad r\cdot D(Q)\leqslant d(Q)\leqslant R\cdot D(Q)$$

这说明：由度量d和D分别确定的M的度量拓扑和流形拓扑是等价的。‖

§6.2 黎曼联络

设$(M,\ g)$是n维黎曼流形，U是M的一个坐标域，局部坐标是$(x^1,\ \cdots,\ x^n)$，$P\in U$。

定义6 设∇是黎曼流形M上一线性联络，∇称为度量联

络，如果

$X(g(Y, Z))=g(\nabla_X Y, Z)+g(Y, \nabla_X Z)$, $\forall X, Y, Z\in C^\infty(M, TM)$. 流形$M$上定义了线性联络以后，就可以相应的定义$M$上的平行移动$P_\alpha$: $T_{\alpha(a)}M\to T_{\alpha(b)}M$，这是向量空间$T_{\alpha(a)}M$和$T_{\alpha(b)}M$的线性同构。

定义7 线性变换A: $T_PM\to T_QM$ 称为保长的，如果

$$g(AX_P, AY_P)=g(X_P, Y_P), \quad \forall X_P, Y_P\in T_PM$$

命题1 黎曼流形M上的线性联络∇是度量联络当而仅当它所确定的（沿M上每一条光滑曲线α的）平行移动是保长的。

证明：先设∇是M上的度量联络，α: $I\to M$是光滑曲线，$\tilde{Y}$, $\tilde{Z}\in T_{\alpha(0)}M$，$Y$和$Z$分别是由$\tilde{Y}$和$\tilde{Z}$沿曲线$\alpha$平移而生成的向量场

$$\frac{d}{dt}g_{\alpha(t)}(Y, Z)=T_\alpha g_{\alpha(t)}(Y, Z)$$

$$=g_{\alpha(t)}(\nabla_{T_\alpha}Y, Z)+g_{\alpha(t)}(Y, \nabla_{T_\alpha}Z)=0$$

$\therefore \quad g_{\alpha(t)}(Y, Z)=$常数

再设，对于M上每一条光滑曲线α，线性联络∇所确定的平行移动P_α是保长的，命$X_P\in T_PM$，对于线性联络∇来说，在M上存在唯一测地线α使得$\alpha(0)=P$；$T_{\alpha(0)}=X_P$。

命$\{\tilde{W}_1, \cdots, \tilde{W}_n\}$是$T_PM$中对于度量$g_P$的一组标准正交基，即

$$g_P(\tilde{W}_i, \tilde{W}_j)=\delta_{ij} \quad i, j=1, 2, \cdots, n$$

再命$\{W_1, \cdots, W_n\}$是$\{\tilde{W}_1, \cdots, \tilde{W}_n\}$沿曲线$\alpha$平移而生成的向量场，因为$P_\alpha$是线性同构，所以$\{W_i\}$在曲线$\alpha$的每一点处是线性无关的，它们构成$T_{\alpha(t)}M$的一组基，根据假设

$$g_{\alpha(t)}(W_i, W_j)=g_P(\tilde{W}_i, \tilde{W}_j)=\delta_{ij}$$

所以$\{W_1, \cdots, W_n\}$在α的每一点的切空间$T_{\alpha(t)}M$中确定了一组标准正交基，任给两向量场Y, $Z\in C^\infty(M, TM)$，

$$Y_{\alpha(t)}=\sum_i Y^i(t)(W_i)_{\alpha(t)}, \quad Z_{\alpha(t)}=\sum_j Z^j(t)(W_j)_{\alpha(t)}$$

$$\therefore \quad g_{\alpha(t)}(Y, Z) = \sum_{i,j} Y^i Z^j g_{\alpha(t)}(W_i, W_j) = \sum_i Y^i \cdot Z^i$$

此外，由于W_i沿曲线α是平行的，$\nabla_T(W_i)=0$．所以

$$\nabla_T(Y) = \sum_i (TY^i)W_i + \sum_i Y^i(\nabla_T W_i) = \sum_i (TY^i)W_i$$

因此

$$g(\nabla_T Y, Z) + g(Y, \nabla_T Z) = \sum_i (TY^i)Z^i + \sum_i Y^i(TZ^i)$$

$$= T\left(\sum_i Y^i Z^i\right) = T(g(Y, Z))$$

命$t=0$，这时$T_{\alpha(0)}=X_P$，所以

$$X_P \cdot g(Y, Z) = g_P(\nabla_X Y, Z) + g_P(Y, \nabla_X Z)$$

因此∇是度量联络。‖

定理1 （黎曼几何的基本定理） 设(M, g)是一个黎曼流形，则M上存在唯一无挠率度量联络。

证明：先证明唯一性。如果M上存在一个无挠率度量联络∇，对于$\forall X, Y, Z \in C^\infty(M, TM)$有

$$X(g(Y, Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

$$Y(g(Z, X)) = g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)$$

$$Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y)$$

$$X(g(Y, Z)) + Y(g(Z, X)) - Z(g(X, Y))$$

$$= g(\nabla_X Y + \nabla_Y X, Z) + g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X)$$

$$+ g(X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y)$$

因为联络∇是无挠率的

$$\nabla_Y X = \nabla_X Y - [X, Y], \quad \nabla_Z X - \nabla_X Z = [Z, X]$$

$$\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$$

上式$= 2(g(\nabla_X Y, Z)) + g(X, [Y, Z]) - g(Y, [Z, X])$

$- g(Z, [X, Y])$。

$$\therefore\quad g(\nabla_X Y, Z)=\frac{1}{2}\{X(g(Y,Z))+Y(g(Z,X))-Z(g(X,Y))-g(X,[Y,Z])+g(Y,[Z,X])+g(Z,[X,Y])\}$$

由于上式右边完全由 g 所确定，所以左边的 $\nabla_X Y$ 由 g 唯一确定。再证明存在性，我们先用 g 在每一坐标域 U_α 上作线性联络 ∇^α 如 Γ_α。设 U 上的局部坐标是 $(x^1, \cdots, x^n)$，命

$$X=\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=\frac{\partial}{\partial x^j},\quad Z=\frac{\partial}{\partial x^k}$$

则
$$[X, Y]=[Y, Z]=[Z, X]=0$$

$$X(g(Y, Z))=\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i},\ Y(g(Z,X))=\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}$$

$$Z(g(X, Y))=\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}$$

命
$$\nabla_X Y=\nabla_{\partial/\partial x^i}(\partial/\partial x^j)=\sum_l \Gamma^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l}$$

则从 $g(\nabla_X Y, Z)$ 的表达式知

$$\sum_l \Gamma^l_{ij}g_{lk}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

$$\therefore\quad \Gamma^l_{ij}=\Gamma^l_{ji}=\frac{1}{2}\sum_k g^{lk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

其中 $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$

这个联络在坐标域 U 上是保长的，无挠的。

现在，我们已经在每一坐标域 U_α 上定义了联络 ∇^α，相应的Christoffel系数是

$$\Gamma_\alpha{}^l_{ij}=\frac{1}{2}\sum_k g^{lk}|_{U_\alpha}\left(\left.\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}\right|_{U_\alpha}+\left.\frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j}\right|_{U_\alpha}-\left.\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right|_{U_\alpha}\right)$$

$$\nabla^\alpha_{\partial/\partial x^i}(\partial/\partial x^j)=\sum_l \Gamma_\alpha{}^l_{ij}\frac{\partial}{\partial x^l}$$

但是在$U_\alpha \cap U_\beta = W \neq \phi$上

$$\nabla^\alpha = \nabla^W = \nabla^\beta$$

所以我们在整个黎曼流形M上定义了一线性联络∇

$$(\nabla_X Y)_{U_\alpha} = \nabla^\alpha_X|_{U_\alpha}(Y|_{U_\alpha})$$

由于每一个局部联络∇^α是保长的，无挠率的，所以整体地∇也是保长和无挠的。‖

定义8 黎曼流形（M，g）上由度量g所确定的唯一的无挠率线性联络称为黎曼联络。

在坐标域U上，设局部坐标为（x^1，…，x^n）。则协变微商$\nabla_X Y$的局部表达式如下，设

$$X|_U = \sum_i X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad Y|_U = \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$\nabla_X Y|_U = \sum_l \left(\sum_i X^i \frac{\partial Y^l}{\partial x^i} + \sum_{i,j} X^i Y^j \Gamma^l_{ij} \right) \frac{\partial}{\partial x^l}$$

§6.3 协 变 微 商

设∇是n维C^∞流形M上的无挠率线性联络，$X, Y \in C^\infty(M, TM)$，则$\nabla_X Y$称为向量场Y沿方向X的协变微商。

给出M上的光滑曲线α：$[0, 1] \to M$。命$X = T_\alpha$，我们可定义向量场Y沿曲线α的协变微商如下：

定义9 $\dfrac{DY}{dt} = \nabla_{T_\alpha} Y$。或

$$\left(\frac{DY}{dt}\right)_{\alpha(0)} = (\nabla_{T_\alpha} Y)_{\alpha(0)} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [P^{-1}_{\alpha(t)}(Y_{\alpha(t)}) - Y_{\alpha(0)}]。$$

局部的，在坐标域U上，设局部坐标为（x^1，…，x^n），命

$$Y = \sum_i Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$$

则有

$$\frac{DY}{dt}=\nabla_{T_\alpha}Y=\sum_i(T_\alpha Y^i)\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)}$$

$$+\sum_i Y^i(\alpha(t))\nabla_{T_\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$=\sum_i\frac{dY^i(\alpha(t))}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)}$$

$$+\sum_{i,j}Y^i(\alpha(t))\frac{d\alpha^j}{dt}\nabla_{\partial/\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{\alpha(t)}$$

$$=\sum_k\Big[\frac{dY^k(\alpha(t))}{dt}+\sum_{i,j}Y^i(\alpha(t))$$

$$\cdot\frac{d\alpha^j}{dt}\cdot\Gamma^k_{ji}(\alpha(t))\Big]\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\alpha(t)}$$

局部地我们定义

$$\nabla_{\partial/\partial x^i}(Y)=\sum_k Y^k{}_{;i}\frac{\partial}{\partial x^k}$$

则有局部协变微商公式

$$Y^k_{;i}=\frac{\partial Y^k}{\partial x^i}+\sum_j\Gamma^k_{ji}Y^j$$

$$\frac{DY}{dt}=\nabla_{T_\alpha}Y=\sum_{i,k}Y^k{}_{;i}\frac{d\alpha^i}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right)_{\alpha(t)}$$

如果把T_α改回成X，命$X=\sum\limits_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，则有公式

$$\nabla_X Y=\sum_i X^i\nabla_{\partial/\partial x^i}Y=\sum_{i,k}Y^k{}_{;i}X^i(\partial/\partial x^k)$$

下面我们再考虑协变向量场的协变微商，命$\omega\in\Gamma(T^*(M))$。则$\omega_p\in T^*_pM$是一协变向量，因此ω是M上的协变向量场，局部

地，在坐标域U上， $\omega=\sum_i \omega_i(x)dx^i$

M上的线性联络∇确定了沿光滑曲线α的平移$P_{\alpha(t)}$：$T_{\alpha(0)}M\to T_{\alpha(t)}M$，后者又诱导对偶线性同构。$P^*_{\alpha(t)}$：$T^*_{\alpha(t)}M\to T^*_{\alpha(0)}M$定义

$$\left(\frac{D\omega}{dt}\right)_0=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(P^*_{\alpha(t)}\omega_{\alpha(t)}-\omega_{\alpha(0)})$$

命题2 设$\widetilde{X}\in T_{\alpha(0)}M$. 命$X$是沿曲线$\alpha$的向量场，$X_{\alpha(0)}=\widetilde{X}$。则有

$$\left(\frac{D\omega}{dt}\right)_0(\widetilde{X})=\frac{d}{dt}[\omega_{\alpha(t)}(X)]_0-\omega_{\alpha(0)}\left[\left(\frac{DX}{dt}\right)_0\right]$$

证明：$\left(\frac{D\omega}{dt}\right)_0(\widetilde{X})=\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}[\omega_{\alpha(t)}(P_{\alpha(t)}\widetilde{X})-\omega_{\alpha(0)}(\widetilde{X})]$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\omega_{\alpha(t)}(P_{\alpha(t)}\widetilde{X}-X+X)-\omega_{\alpha(0)}(\widetilde{X})]$$

$$=\lim_{t\to 0}\left[\omega_{\alpha(t)}\left(\frac{P_{\alpha(t)}\widetilde{X}-X}{t}\right)\right]$$

$$+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\omega_{\alpha(t)}(X)-\omega_{\alpha(t)}(\widetilde{X})]$$

由于$\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}(P_{\alpha(t)}\widetilde{X}-X)=-\lim\limits_{t\to 0}P_{\alpha(t)}\left[\frac{P^{-1}_{\alpha(t)}X-\widetilde{X}}{t}\right]$

$$=P_{\alpha(0)}(-\nabla_{T\alpha}X)=-\left(\frac{DX}{dt}\right)_0$$

$\therefore$ 上式$=-\omega_{\alpha(0)}\left(\frac{DX}{dt}\right)_0+\frac{d}{dt}[\omega_{\alpha(t)}(X)]_0$ ‖

推论 如果X是沿曲线α平移生成的向量场，则有$\left(\frac{D\omega}{dt}\right)_0$

$\cdot(\widetilde{X}) = \frac{d}{dt}[\omega_{\alpha(t)}(X)]_0$

局部地，在坐标域U上，设局部坐标是（x^1，…，x^n），

$$\omega = \sum_i \omega_i dx^i \text{ 或 } \omega(\partial/\partial x^i) = \omega_i$$

$$\left(\frac{D\omega}{dt}\right)_0 \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{d}{dt}\left[\omega_{\alpha(t)}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right]_0 - \omega_{\alpha(0)}\left[\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right]_0$$

$$= \frac{d}{dt}[\omega_i(d(t))]_0 - \omega_{\alpha(0)}\left[\sum_{j,k} \Gamma^k_{ij} \frac{d\alpha^j}{dt} \frac{\partial}{\partial x^k}\right]_0$$

$$= \left[\sum_j \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \frac{d\alpha^j}{dt}\right]_0 - \left[\sum_{j,k} \frac{d\alpha^j}{dt} \omega_k \Gamma^k_{ij}\right]_0$$

$$\therefore \quad \nabla_{T_\alpha}\omega = \frac{D\omega}{dt} = \sum_{i,j}\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \sum_k \Gamma^k_{ij}\omega_k\right)\frac{d\alpha^j}{dt}dx^i$$

取$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^j}$，并命$\nabla_{\partial/\partial x^j}\omega = \sum_i \omega_{i,j} dx^i$，则有局部协变向量的协变微商公式：

$$\omega_{i,j} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} - \sum_k \Gamma^k_{ij}\omega_k$$

特别地　取$\omega = dx^k$，则

$$\nabla_{\partial/\partial x^j}(dx^k) = -\sum_i \Gamma^k_{ij} dx^i$$

现在我们局部地把协变微商公式推广到一般的张量场，在坐标域U上给出一个（r，s）型张量场，

$$T = \sum_{i,j} T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes\cdots\otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$$

定义：

$$\nabla_X T = \sum_{i,j} X(T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s})\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$$

$$+\sum_{i,j} T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\left(\nabla_X\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}$$

$$\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}+\cdots\cdots$$

$$+\sum_{i,j} T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes(\nabla_X dx^{j_1})\otimes\cdots\otimes$$

$$dx^{j_s}+\cdots\cdots$$

因为

$$\nabla_X\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_j X^j\nabla_{\partial/\partial x^j}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_{j,k} X^j\Gamma^k_{ji}\frac{\partial}{\partial x^k},$$

$$\nabla_X(dx^i)=\sum_j X^j\nabla_{\partial/\partial x^j}(dx^i)=-\sum_{j,k}\Gamma^i_{kj}X^j dx^k,$$

于是得到：

命题3

$$\nabla_X T=\sum_{i,j,k} X^k\left[\frac{\partial}{\partial x^k}(T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s})+\sum_i \Gamma^{i_1}_{ki}T^{i i_2\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}+\cdots\right.$$

$$\left.-\sum_j \Gamma^j_{j_1 k}T^{i_1\cdots i_r}{}_{j j_2\cdots j_s}\cdots\cdots\right]\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}$$

$$\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$$

证明：直接计算。

命 $\nabla_{\partial/\partial x^k}T=\sum_{i,j} T^{i\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$，则我们得到经典的张量场的协变微商公式

$$T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s;k}=\frac{\partial T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}}{\partial x^k}+\sum_i \Gamma_{ki}^{i_1}T^{i i_2\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}+\cdots$$

$$-\sum_j \Gamma_{j_1 k}^{j}T^{i_1\cdots i_r}{}_{j j_2\cdots j_s}-\cdots$$

第七章　黎 曼 曲 率

§7.1　黎 曼 曲 率

对于 R^n 中的光滑函数 $f\in C^\infty(R^n)$ 来说，经典微积分告诉我们，二阶偏微商是与微分的次序无关的，即

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)$$

对于微分流形 M 上的光滑函数 $f\in C^\infty(M)$ 来说，类似的性质不成立，代替上式的公式是：对于 $\forall X,\ Y\in C^\infty(M,TM)$，

$$X(Yf)-Y(Xf)=[X,Y]f$$

但是对于协变微商来说，一般地

$$\nabla_X(\nabla_Y f)-\nabla_Y(\nabla_X f)\neq\nabla_{[X,Y]}f$$

于是我们得到

定义 1　设 $(M,\ g)$ 是一个 n 维黎曼流形，映射

$$R:\ C^\infty(M,TM)\times C^\infty(M,TM)\times C^\infty(M,TM)\to C^\infty(M,TM)$$

定义为

$$R(X,Y)Z=\nabla_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(\nabla_X Z)-\nabla_{[X,Y]}Z$$

R 称为（1，3）型 Riemann-Christoffel 曲率张量场。

附记　（1）映射 R 是多线性的，并且对于 $f\in C^\infty(M)$

$$R(fX,Y)Z=R(X,fY)Z=R(X,Y)(fZ)=fR(X,Y)Z$$

（2）局部地，在坐标域 U 上，设局部坐标是 $(x^1,\cdots,x^n)$，则有公式

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_l R^l_{\ ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}$$

其中

$$R^l_{ijk}=\frac{\partial\Gamma_{ik}^l}{\partial x^j}-\frac{\partial\Gamma_{ij}^l}{\partial x^k}+\sum_p(\Gamma_{kp}^l\Gamma_{ij}^p-\Gamma_{jp}^l\Gamma_{ik}^p)$$

这式子可以通过直接计算$R\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$而得到，不过在这一章之末我们将用外微分法给出它的另一个证明。

定义 2 黎曼流形（M, g）上的（0，4型）*Riemann-christoffel* 曲率张量场是一映射：

$$R:\ C^\infty(M,TM)\times C^\infty(M,TM)\times C^\infty(M,TM)\times C^\infty(M,TM)\to C^\infty(M)$$

定义为

$$R(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$$

局部地，在坐标域U上，设局部坐标是$(x^1,\cdots,x^n)$。

$$R_{iljk}=R\left(\frac{\partial}{\partial x^j},\ \frac{\partial}{\partial x^k},\ \frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^l}\right)$$

$$=g\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\ \ \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\frac{\partial}{\partial x^i},\ \frac{\partial}{\partial x^l}\right)=\sum_p g_{lp}R^p_{ijk}$$

定理 1 $R(X,Y,Z)|_P$ 只依赖于 $X_P Y_P Z_P$。

证明：设U是M上围绕P点的坐标域，局部坐标是$(x^1,\cdots,x^n)$，$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$是$T_P(M)$的一组基，在$U$上，命

$$X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\ Y=\sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial x^j},\ Z=\sum_k Z^k\frac{\partial}{\partial x^k}$$

则有

$$R(X,Y)Z|_P=\sum_{i,j,k}X^i(P)Y^j(P)Z^k(P)R_{ijk}^l(P)\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)_P\ \Big|$$

推论

（1） $R(X,Y,Z,W)|_P$ 只依赖于 x_P, y_P, z_P, w_P；

（2） $R(X_P,Y_P)$：$T_PM \to T_PM$ 是线性映射。

证明：分别把 X_P, Y_P, Z_P 扩充成向量场 X，Y，Z。但是根据上定理，$R(X,Y,)Z|_P$ 只依赖于 X_P,Y_P,Z_P 与扩充无关，因此我们可以定义

$$R(X_P,Y_P)Z_P = R(X,Y)Z|_P$$

由于 R 是多线性的，所以映射 $R(X_P,Y_P)$：$T_PM \to T_PM$ 是线性的，

附记 $R(X,Y)$ 称为**曲率算子**。

定义 3 给出两个黎曼流形 (M_1,g_1) 和 (M_2,g_2)，映射 Φ：$M_1 \to M_2$ 称为保长的。如果 $\Phi^*g_2 = g_1$，即

$$\Phi^*g_2(X,Y) = g_2(\Phi_*X,\Phi_*Y) = g_1(X,Y).$$

定理 2 保长映射 Φ：$M_1 \to M_2$ 保持 *Riemann* 联络不变。

证明：设 ∇^1 和 ∇^2 分别是 *Riemann* 流形 (M_1,g_1) 和 (M_2,g_2) 的黎曼联络，并设 $g_1 = \Phi^*g_2$，求证：

$\Phi_*(\nabla^1_XY) = \nabla^2_{\Phi_*X}(\Phi_*Y)$ 或 $g_2(\Phi_*(\nabla^1_XY),\Phi_*Z) = g_2(\nabla^2_{\Phi_*X}(\Phi_*Y),\Phi_*Z)$，或

$$g_1(\nabla^1_XY,Z) = g_2(\Phi_*(\nabla^1_XY)\Phi_*Z)$$
$$= g_2(\nabla^2_{\Phi_*X}(\Phi_*Y),\Phi_*Z)$$

证明：$\because X(f\circ\Phi) = X(\Phi^*f) = \Phi_*X(f)$

$\therefore X(g_1(Y,Z)) = X(\Phi^*g_2(Y,Z))$

$= \Phi_*X(g_2\cdot(\Phi_*Y,\Phi_*Z))$

$g_2(\Phi_*(\nabla^1_XY),\Phi_*Z) = \Phi^*g_2(\nabla^1_XY,Z) = g_1(\nabla^1_XY,Z)$

$= \frac{1}{2}\{X(g_1(Y,Z)) + Y(g_1(Z,X)) - Z(g_1(X,Y))$
$+ g_1(X,[Y,Z]) + g_1(Y,[Z,X]) - g_1(Z,[X,Y])\}$

$= \frac{1}{2}\{\Phi_*X(g_2(\Phi_*Y,\Phi_*Z)) + \Phi_*Y(g_2(\Phi_*Z,\Phi_*X))$
$- \Phi_*Z(g_2(\Phi_*X,\Phi_*Y)) + g_2(\Phi_*X,[\Phi_*Y,\Phi_*Z])$
$+ g_2(\Phi_*Y,[\Phi_*Z,\Phi_*X]) - g_2(\Phi_*Z,[\Phi_*X,\Phi_*Y])\}$

$= g_2(\nabla^2_{\Phi_*X}(\Phi_*Y),\Phi_*Z) \|$

推论 保长映射 Φ：$M_1 \to M_2$ 保持黎曼曲率。这就是要证明 $\Phi^* R_2 = R_1$ 或

$$R_2(\Phi_* X, \Phi_* Y)\Phi_* Z = \Phi_* [R_1(X, Y)Z]$$

证明：$\Phi_*\{R_1(X, Y)Z\} = \Phi_*(\nabla^1_X \nabla^1_Y Z) - \Phi_*(\nabla^1_Y \nabla^1_X Z) - \Phi_*(\nabla^1_{[X,Y]} Z) = \nabla^2_{\Phi_* X}\{\Phi_*(\nabla^1_Y Z)\} - \nabla^2_{\Phi_* Y}\{\Phi_*(\nabla^1_X Z)\} - \nabla^2_{\Phi_*[X,Y]}\Phi_* Z = \nabla^2_{\Phi_* X}\nabla^2_{\Phi_* Y}(\Phi_* Z) - \nabla^2_{\Phi_* Y}\nabla^2_{\Phi_* X}(\Phi_* Z) - \nabla^2_{[\Phi_* X, \Phi_* Y]}(\Phi_* Z) = R_2(\Phi_* X, \Phi_* Y)\cdot\Phi_* Z$。 ||

附记 上述推理可以推广如下：设 M_1 和 M_2 是两个 C^∞ 流形，其上分别定义了线性联络 ∇^1 和 ∇^2，如果光滑映射 Φ：$M_1 \to M_2$ 是保持联络的，即对于 $\forall X, Y \in C^\infty(M, TM)$ 有 $\Phi_*(\nabla^1_X Y) = \nabla^2_{\Phi_* X}(\Phi_* Y)$，则 Φ 也一定保持这两联络所确定的曲率张量场。即 $\Phi^* R_2 = R_1$。

定理 3 对于黎曼流形 M 上的曲率张量场和曲率算子，下列对称关系成立：$\forall X, Y, Z, W \in C^\infty(M, TM)$。

(a) $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$；

(b) $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$；

(c) $g(R(X, Y)Z, W) + g(R(X, Y)W, Z) = 0$；

(d) $g(R(X, Y)Z, W) + g(R(Z, W)X, Y) = 0$。

证明：

(a) 直接得自 $R(X, Y)Z$ 的定义。

(b) 只须证明等式对 M 的每一点 P 成立。取围绕 P 的坐标域 U，设局部坐标是 $(x^1, \cdots, x^n)$，由于 R 是多线性的，我们只需考虑 $X = \frac{\partial}{\partial X^j}$，$Y = \frac{\partial}{\partial X^k}$，$Z = \frac{\partial}{\partial X^l}$ 的情形。这时 $[X, Y] = 0$，

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z$$

又因为黎曼联络是无挠率的，所以

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] = 0$$

$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) + \nabla_Y(\nabla_Z X) - \nabla_Z(\nabla_Y X) + \nabla_Z(\nabla_X Y) - \nabla_X(\nabla_Z Y) = 0$ ||

（c）命$U=Z-W$，只须证明$g(R(X,Y)U,U)=0$。由于$[X,Y]=0$，所以

$$g(R(X,Y)U,U)=g(\nabla_X(\nabla_Y U)-\nabla_Y(\nabla_X U),U)$$

注意

$$\begin{aligned}Y[X(g(U,U))]&=Y[2g(\nabla_X U,U)]\\&=2g(\nabla_Y(\nabla_X U),U)\\&\quad+2g\cdot(\nabla_X U,\nabla_Y U)\end{aligned}$$

$$\therefore\quad g(\nabla_Y(\nabla_X U),U)=\frac{1}{2}YX(g(U,U))-g(\nabla_X U,\nabla_Y U)$$

$$\begin{aligned}&g(R(X,Y)U,U)\\&=\left[\frac{1}{2}YX(g(U,U))-g(\nabla_X U,\nabla_Y U)\right]\\&\quad-\left[\frac{1}{2}XY(g(U,U))-g(\nabla_Y U,\nabla_X U)\right]\\&=\frac{1}{2}[Y,X](g(U,U))=0\end{aligned}$$ ‖

（d）根据（b）：

$$g(R(X,Y)Z,W)+g(R(Y,Z)X,W)+g(R(Z,X)Y,W)=0$$

再根据（a）－（c），我们还得到关系式：

$$g(R(X,Y)Z,W)+g(R(Y,W)Z,X)+g(R(X,W)Y,Z)=0$$

$$g(R(Y,Z)X,W)+g(R(Y,W)Z,X)+g(R(Z,W)X,Y)=0$$

$$g(R(Z,W)X,Y)+g(R(Z,X)Y,W)+g(R(X,W)Y,Z)=0$$

把以上四个式子的前两式加起来减去后两式就得到（d）。‖

推论： 在坐标域U中，定理中的结果可以用局部坐标表示如下：$i,j,k,l=1,2,\cdots,n$

(a) $R_{i\,kl}^{\,j}+R_{i\,lk}^{\,j}=0$;

(b) $R_{i\,kl}^{\,j}+R_{k\,li}^{\,j}+R_{l\,ik}^{\,j}=0$;

(c) $R_{ijkl}+R_{jikl}=0$;

(d) $R_{ijkl}+R_{klij}=0$;

(e) $R_{ijkl}+R_{iklj}+R_{iljk}=0$.

其中（e）得自（b）和（c）。

附记 等式（a）—（e）称为第一类Bianchi恒等式。

§7.2 截面曲率

定义 4 命 π 是 T_pM 中一二维子空间，称为**平面截面**，设 $\{X_p, Y_p\}$ 是平面截面 π 的一组标准正交基。截面曲率 $K(\pi)$ 定义为

$$K(\pi)=-R(X_p,Y_p,X_p,Y_p)$$
$$=-g_p(R(X_p,Y_p)X_p,Y_p)$$

附记 对于平面截面 π 的任一组基 $\{e_1, e_2\}$ 命

$$e_1=a_1X_p+a_2Y_p,\quad e_2=b_1X_p+b_2Y_p$$

则

$$(e_1\times e_2)^2=(e_1\cdot e_1)(e_2\cdot e_2)-(e_1\cdot e_2)^2=\triangle^2,$$

$$\triangle=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$g(R(e_1,e_2)e_1,e_2)=\triangle^2 g(R(X_p,Y_p)X_p,Y_p)$$
$$=\{g(e_1,e_1)g(e_2,e_2)-[g(e_1,e_2)]^2\}g(R(X_p,Y_p)X_p,Y_p)$$

$$\therefore\quad K(\pi)=-\frac{g(R(e_1,e_2)e_1,e_2)}{g(e_1,e_1)g(e_2,e_2)-[g(e_1,e_2)]^2}$$

局部地，命 $e_1=\sum_i \alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$e_2=\sum_j \beta^j\frac{\partial}{\partial x^j}$

注意 $g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)=g_{ij}$，则有

$$K(\pi)=-\frac{\sum\limits_{i,j,k,l} R_{ijkl}\alpha^i\beta^j\alpha^k\beta^l}{\sum\limits_{i,j,k,l}(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})\alpha^i\beta^j\alpha^k\beta^l}$$

如果$\dim M=2$，则$K(\pi)$ 就是点$P\in M$ 的 Gauss 曲率。

定理 4 如果 $\dim M\geqslant 3$，并且 T_PM 的所有平面截面 π 的截面曲率$K(\pi)$ 已经知道，则M在P点的黎曼曲率的值就唯一确定了。

设$R(X,Y,Z,W)$ 和 $\widetilde{R}(X,Y,Z,W)$ 是满足定理3中各关系式的张量场，如果已知$R(X,Y,X,Y)=\widetilde{R}(X,Y,X,Y)$。

求证：$R(X,Y,Z,W)=\widetilde{R}(X,Y,Z,W)$ 对$\forall X,Y,Z,W\in T_PM$，

证明：命 $A=R-\widetilde{R}$ 已知$A(X,Y,X,Y)=0$，再命$X=\sum\limits_i\alpha^i\frac{\partial}{\partial x^i}$，$Y=\sum\limits_j\beta^j\frac{\partial}{\partial x^j}$，

则有 $$\sum_{i,j,k,l}A_{ijkl}\alpha^i\beta^j\alpha^k\beta^l=0$$

先取 $\alpha^i=\delta_{i_0i}$，$\beta^j=\delta_{j_0j}$，则有 $A_{i_0j_0i_0j_0}=0$。

再取 $\alpha^i=\delta_{i_0i}$，$\beta^{j_0}=\beta^{k_0}=1$，其他 $\beta^j=0$，则有 $A_{i_0j_0i_0k_0}=0$，

最后取 $\alpha^{i_0}=\alpha^{k_0}=1$，其它 $\alpha^i=0$；$\beta^{j_0}=\beta^{l_0}=1$，其他 $\beta^j=0$，根据定理3(e)，

$$\begin{aligned}0&=A_{i_0j_0k_0l_0}+A_{k_0j_0i_0l_0}+A_{i_0l_0k_0j_0}+A_{k_0l_0i_0j_0}\\&=2A_{i_0j_0k_0l_0}+2A_{i_0l_0k_0j_0}\\&=-2A_{i_0k_0l_0j_0}-2A_{i_0l_0j_0k_0}+2A_{i_0l_0k_0j_0}\end{aligned}$$

$$\therefore\qquad A_{i_0k_0l_0j_0}=2A_{i_0l_0k_0j_0}$$

交换 k_0 和 l_0，

$$A_{i_0l_0k_0j_0}=2A_{i_0k_0l_0j_0}$$

$$\therefore \qquad A_{i_0k_0l_0j_0}=2A_{i_0l_0k_0j_0}=4A_{i_0k_0l_0j_0}$$

由此推出
$$A_{i_0k_0l_0j_0}=0$$
定理证毕。‖

推论 如果在一点$P\in M$，所有截面曲率是常数K_P，则在这点有

$$R_{ijkl}=-K_P(g_{ik}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$$

证明：等式的右边满足定理 3 的关系式（a）——（d），并且用它来计算任何截面的截面曲率是常数K_P，根据定理 4 所证明的唯一性，曲率张量场就是右边的式子。‖

定义 5 如果对于黎曼流形M的每一点P，并且对于T_PM的任何一个平面截面π，截面曲率是同一常数，即$K_P(\pi)=K$，对于$\forall P\in M$，$\pi\in T_PM$，则M称为**常曲率黎曼流形**，或简称**常曲率流形**。

关于常曲率流形，我们将在第八章中详细讨论。

定义 6 设$\{E_1, \cdots\cdots, E_n\}$是$T_PM$中一组标准正交基，则

$$S_P(X_P, Y_P)=\sum_i R(E_i, X_P, Y_P, E_i)$$

$$=\sum_i g(R(E_i, X_P)Y_P, E_i)$$

与标准正交基$\{E_i\}$的选择无关，于是定义了M上的一个二阶协变对称张量场，称为M的 **Ricci 曲率**。

局部地，在坐标域U上，设局部坐标是$(x^1, \cdots\cdots, x^n)$，命

$$E_j=\sum_l a_j^l\frac{\partial}{\partial x^l},\quad X_P=\frac{\partial}{\partial x^k},\quad Y_P=\frac{\partial}{\partial x^l}$$

注意

$$\delta_{ij}=g(E_i, E_j)=\sum_{l,\ m} a_i^l a_j^m g\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$$

$$=\sum_{l,\ m} a_i^l a_j^m g_{lm}$$

$$\therefore a\cdot g\cdot a^t = I \Longrightarrow g^{-1}=a^t\cdot a \text{ 或 } g^{lm}=\sum_i a_i^l a_i^m$$

$$S_P(X_P, Y_P) = \sum_{s,l,m} a_s^l a_s^m R\left(\frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}, \frac{\partial}{\partial x^m}\right)$$

$$= \sum_{l,m} g^{lm} R_{imlk} = \sum_{l,m} g^{lm} R_{mikl}$$

$$\therefore \qquad R_{ik}=S_P\left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_{l,m} g^{lm} R_{mikl}$$

根据定理 3，容易证明：Ricci 曲率是对称的，即 $R_{ik}=R_{ki}$。

下面指出，Ricci 曲率与标准正交基 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 的选择无关，设 $\{F_1, \cdots\cdots, F_n\}$ 是另一组标准正交基，命

$$F_i=\sum_j a_i^j E_j,\ a=(a_i^j) \text{ 是正交矩阵}$$

$$\sum_i R(F_i, X_P, Y_P, F_i)=\sum_{i,j,k} a_i^j a_i^k R(E_j, X_P, Y_P, E_k)$$

$$=\sum_{jk}\delta_{jk}R(E_j, X_P, Y_P, E_k)=\sum_i R(E_j, X_P, Y_P, E_j)$$

定义 7　黎曼流形 (M, g) 称为 Einstein 流形，如果存在常数 $e\in R$，使得

$$S(X,Y)=eg(X,Y).$$

显然常曲率流形是 Einstein 流形的特例。

定义黎曼流形 (M, g) 在 P 点的数曲率是

$$r(P)=\sum_i S(E_i, E_i)=\sum_{i,j} R(E_i, E_j, E_j, E_i),$$

其中 $\{E_1, \cdots\cdots, E_n\}$ 是 T_PM 中一组标准正交基，与 Ricci 曲率相同，这个定义与标准正交基 $\{E_i\}$ 的选择无关。

局部地，在坐标域 U 上，

$$r(P)=\sum_{i,j,k,l} g^{ik}g^{lj}R_{iljk}$$

§7.3 E.Cartan的结构方程

设 (M, g) 是一个 n 维黎曼流形，U 是 M 的一个坐标域，局部坐标是 $(x^1, \cdots\cdots, x^n)$，$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots\cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$ 是 U 上的局部标架场，命 $\{\theta^1, \cdots\cdots, \theta^n\}$ 是 U 上的对偶标架场，即

$$\theta^j\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\delta^j_i, \qquad (i, j=1, 2, \cdots\cdots, n)$$

定理 5 存在 U 上唯一一组 n^2 个 C^∞ 形式 θ^k_j $(j, k=1, 2, \cdots\cdots, n)$，它们满足条件：

(a) $d\theta^i=\sum_j \theta^j\wedge\theta^i_j, \qquad i=1, \cdots\cdots, n$

(b) $dg_{ij}=\sum_k (\theta^k_i g_{kj}+\theta^k_j g_{ki}), \qquad i, j=1, \cdots\cdots, n$

这组 U 上的 1-形式 $\{\theta^k_j\}$ 确定了 M 上的黎曼联络，称为黎曼流形 M 的联络形式。

证明：设 $\theta^k_j=\sum_l a_l{}^k_j(x)\theta^l$

$$d\theta^i\left(\frac{\partial}{\partial x^r}, \frac{\partial}{\partial x^s}\right)=\frac{\partial}{\partial x^r}\left[\theta^i\left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x^s}\left[\theta^i\left(\frac{\partial}{\partial x^r}\right)\right]$$

$$-\theta^i\left(\left[\frac{\partial}{\partial x^r}, \frac{\partial}{\partial x^s}\right]\right)=0$$

$$\sum_j \theta^j\wedge\theta^i_j\left(\frac{\partial}{\partial x^r}, \frac{\partial}{\partial x^s}\right)=\sum_{j,l} a_l{}^i_j(x)\theta^j\wedge\theta^l\left(\frac{\partial}{\partial x^r}, \frac{\partial}{\partial x^s}\right)$$

$$=a_s{}^i_r(x)-a_r{}^i_s(x)$$

因此，要使 (a) 成立，只须

$$a_r{}^i_s(x)=a_s{}^i_r(x)$$

根据系数 a_{rs}^i 的对称性，条件（b）等价于

$$\sum_i g_{ik}a_{rs}^i=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ks}}{\partial x^r}+\frac{\partial g_{rk}}{\partial x^s}-\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^k}\right)$$

因此要使（b）成立，只须

$$a_{rs}^i=\Gamma_{rs}^i$$

这一方面说明：1-形式组 $\{\theta_j^k\}$ 完全由黎曼流形 M 的黎曼度量唯一确定；另一方面，又说明黎曼联络的 Christoffel 系数 Γ_{rs}^i 正好是联络形式 θ_j^k 的系数，两者互相确定，有了联络形式，我们可以定义联络 ∇ 如下：

$$\Gamma_{rs}^i=\theta_s^i\left(\frac{\partial}{\partial x^r}\right),\quad \nabla_{\partial/\partial x^r}\left(\frac{\partial}{\partial x^s}\right)=\sum_i\Gamma_{rs}^i\frac{\partial}{\partial x^i}$$

条件（a）和（b）等于说：这样定义的线性联络 ∇ 是无挠率的（$\Gamma_{rs}^i=\Gamma_{sr}^i$）和保长的$\left(\Gamma_{rs}^i=\sum_j\frac{1}{2}g^{ij}\cdot\left(\frac{\partial g_{js}}{\partial x^r}+\frac{\partial g_{rj}}{\partial x^s}-\frac{\partial g_{rs}}{\partial x^j}\right)\right)$，因此 ∇ 是黎曼联络。‖

如果$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$是局部标准正交标架场，即

$$g_{ij}=g\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_{ij}$$

再命对偶标架场是 $\{\omega^1,\cdots\cdots,\omega^n\}$，$\omega^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\delta_j^i$，则有

推论 存在 U 上 n^2 个 C^∞ 1-形式 $\{\omega_j^k\}$，（$j,k=1,\cdots\cdots,n$），它们满足条件：

（a）′ $d\omega^i=\sum_j\omega^j\wedge\omega_j^i$，（$i=1,\cdots\cdots,n$）

（b）′ $\omega_j^k+\omega_k^j=0$，（$j,k=1,\cdots\cdots,n$）

这些 1-形式由黎曼联络所确定（$\omega_j^k=\sum_i\Gamma_{ij}^k\omega^i$），并且反过来，它们又确定黎曼联络，$\left(\Gamma_{ij}^k=\omega_j^k\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right)$。

下面我们再定义U上n^2个C^∞2-形式$\{\Omega_i^j\}$　（$i,j=1,\cdots\cdots,n$）：

$$\Omega_i^j=\sum_{k<l}R^j_{ikl}\theta^k\wedge\theta^l=\frac{1}{2}\sum_{k,l}R^j_{ikl}\theta^k\wedge\theta^l$$

则有

$$\sum_j\Omega_i^j\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\ \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^j}=\sum_j R^j_{ikl}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$=R\left(\frac{\partial}{\partial x^k},\ \frac{\partial}{\partial x^l}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

上式还可以线性地扩充成：

$$R(X,Y)\frac{\partial}{\partial x^i}=\sum_j\Omega_i^j(X,Y)\frac{\partial}{\partial x^j},\ \forall X,Y\in\Gamma(T(M))$$

由于$R(X,Y)Z|_P$仅依赖于X_P, Y_P, $Z_P\in T_PM$，所以$\Omega_i^j(X,Y)|_P$仅依赖于X_P和Y_P，并且我们还有关系式

$$\Omega_i^j(X,Y)=-\Omega_i^j(Y,X)$$

定理 6　U上的2-形式组$\{\Omega_i^j\}$由下列方程组定义

$$\Omega_i^j=d\theta_i^j-\sum_k\theta_i^k\wedge\theta_k^j,\ (\ i,\ j=1,\cdots,n\ )$$

这些形式称为U上的曲率形式，它们依赖于M的黎曼度量g和特殊的标架场$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$。

证明：命$X,Y\in\Gamma(T(M))$，

$$\sum_j\Omega_i^j(X,Y)\frac{\partial}{\partial x^j}=R(X,Y)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$=\nabla_X\left(\nabla_Y\frac{\partial}{\partial x^i}\right)-\nabla_Y\left(\nabla_X\frac{\partial}{\partial x^i}\right)-\nabla_{[X,Y]}\frac{\partial}{\partial x^i}$$

$$=\nabla_X\left(\sum_j\theta_i^j(Y)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)-\nabla_Y\left(\sum_j\theta_i^j(X)\frac{\partial}{\partial x^j}\right)$$

$$-\sum_j \theta_i^j([X,Y])\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$=\sum_j (X\theta_i^j(Y)-Y\theta_i^j(X)-\theta_i^j([X,Y]))\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$+\sum_{j,i,k}\theta_i^j(Y)\theta_j^k(X)\frac{\partial}{\partial x^k}-\sum_{j,k}\theta_i^j(X)\theta_j^k(Y)\frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$=\sum_j\Big\{d\theta_i^j(X,Y)-\sum_k[\theta_i^k(X)\theta_k^j(Y)$$

$$-\theta_i^k(Y)\theta_k^j(X)]\Big\}\frac{\partial}{\partial x^j}$$

$$=\sum_j\Big(d\theta_i^j-\sum_k\theta_i^k\wedge\theta_k^j\Big)(X,Y)\frac{\partial}{\partial x^j}\ \|$$

推论 1　命$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1},\cdots\cdots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$是$U$上标准正交标架场，$\{\omega^1,\cdots\cdots,\omega^n\}$是对偶标架场，则存在$n^2$个1-形式$\{\omega_i^j\}$和2-形式$\{\Omega_i^j\}$（$i,j=1,\cdots\cdots,n$）满足下列方程组：

$$d\omega^i=\sum_j\omega^j\wedge\omega_j^i$$

$$\omega_i^j+\omega_j^i=0$$

$$\Omega_i^j=d\omega_i^j-\sum_k\omega_i^k\wedge\omega_k^j,\qquad \Omega_i^j+\Omega_j^i=0$$

这方程组称为黎曼流形（M，g）的结构方程。

推论 2　设$\theta_j^k=\sum_i\Gamma_{ij}^k\theta^i$，则$\Gamma_{ij}^k=\Gamma_{ji}^k$

并且

$$R_{ikl}^j=\frac{\partial\Gamma_{il}^j}{\partial x^k}-\frac{\partial\Gamma_{ik}^j}{\partial x^l}+\sum_s(\Gamma_{il}^s\Gamma_{sk}^j-\Gamma_{ik}^s\Gamma_{sl}^j)$$

证明：$\Omega_i^j = d\theta_i^j - \sum_s \theta_i^s \wedge \theta_s^j = \sum_l (d\Gamma_{li}^j \wedge \theta^l + \Gamma_{li}^j d\theta^l)$

$$- \sum_{k,l,s} \Gamma_{ki}^s \Gamma_{ls}^j \theta^k \wedge \theta^l$$

注意 $d\theta^l = \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^l = \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^l \theta^j \wedge \theta^i = 0$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \sum_{k,l} R_{ikl}^j \theta^k \wedge \theta^l = \sum_{k,l} \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Gamma_{li}^j}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^j}{\partial x^l}\right)\theta^k \wedge \theta^l$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k,l,s} (\Gamma_{ki}^s \Gamma_{sl}^j - \Gamma_{li}^s \Gamma_{sk}^j)\theta^k \wedge \theta^l$$

比较上式两边的 $\theta^k \wedge \theta^l (k < l)$ 的系数，就得到所求的式子。‖

定理 7 设M是一个连通黎曼流形，对于M的每一点P的所有平面截面，截面曲率是常数，如果 $\dim M > 3$，则M是常曲率流形。

证明：设$K(P)$是每一点$P \in M$的公共截面曲率，求证$dK = 0$，为此，取标准正交标架场$\left\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots\cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right\}$，我们有

$$R_{ijkl} = K(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\therefore \quad \Omega_i^j = \Omega_{ij} = K\omega^i \wedge \omega^j$$

$$d\omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j + \Omega_i^j = \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_k^j + K\omega^i \wedge \omega^j$$

把结构方程代入上式简化后得

$$dK \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0$$

但是 $dK = K_1\omega^1 + \cdots\cdots + K_n\omega^n$，则

$$\sum_l K_l \omega^l \wedge \omega^i \wedge \omega^j = 0 \Longrightarrow K_l = 0$$

即 $dK = 0$，所以K在某坐标邻域U上是常数。

对于$U \cap V \neq \phi$的情形，$K_U = K_{U \cap V} = K_V$，所以K在整个流形M上是常数。‖

第八章　测地线和法坐标

§8.1　测　地　线

设 (M, g) 是 n 维黎曼流形，$P\in M$，U是围绕P的坐标域，局部坐标是 $(x^1, \cdots\cdots, x^n)$，α：$[a, b]\longrightarrow M$，$t\mapsto\alpha(t)$ 是M上过P点的一条光滑曲线，$\alpha(0)=P$，(设 $0\in[a, b]$)，$T_\alpha=\dfrac{d\alpha}{dt}$是$\alpha$的切向量，$\dfrac{d\alpha}{dt}(0)=X_P\in T_PM$，再命

$$\|X_P\|=\sqrt{g(X_P, X_P)}，并且\ \alpha^i=X^i\circ\alpha$$

在第五章中，对于线性联络∇，我们已定义了M上的测地线，这一节的结果完全适用于黎曼流形上的黎曼联络。

α是M上的测地线，如果

$$\nabla_{T_\alpha}(T_\alpha)=\frac{D}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)=0$$

用局部坐标来表示，测地线方程是

$$(1)\ \frac{d^2\alpha^i}{dt^2}+\sum_{j,\ k}\Gamma_{jk}^i\frac{d\alpha^j}{dt}\ \frac{d\alpha^k}{dt}=0,\ i=1, 2, \cdots\cdots, n$$

根据常微分方程的解的存在唯一定理，我们知道

引理 1　给定任何$Q\in U$，我们可以找到Q在U中一邻域V和正实数γ和δ使得对于$\forall P\in V$和$X_P\in T_PM$，$\|X_P\|<\gamma$，测地线方程（1）在U上存在唯一解$(\alpha^1(t), \cdots\cdots, \alpha^n(t))$，$|t|<\delta$，并满足

$$\alpha(0)=P, \frac{d\alpha}{dt}(0)=X_P$$

推论　设$P\in M$，给出$Y_P\in T_PM$，则存在正实数λ和δ和M上一条测地线$\alpha(t)$，$|t|<\delta$，使得$\alpha(0)=P$，$\dfrac{d\alpha}{dt}(0)=\lambda Y_P$。

证明：取λ使得$\|\lambda Y_P\|<$上述引理中的γ·‖

现在的问题是测地线$\alpha(t)$能否无限延伸，也就是说，定义域$[a, b]$能否扩充成整个实数轴$(-\infty, +\infty)$。这一般来说是不可能的，设$M=R^2-\{0\}$，则从原点出发的射线不能反方向扩充，不过下面我们将证明$\alpha(t)$可扩充到区间$|t|<2$上。

定理 1 设$Q\in$坐标域U，则存在点Q在U中邻域V和正数ε使得：对于$\forall P\in V$，$X_P\in T_PM$，$\|X_P\|<\varepsilon$，存在U中唯一测地线$\alpha(t)$，$|t|<2$，使得$\alpha(0)=P$，$\dfrac{d\alpha}{dt}(0)=X_P$。

证明：根据引理1，存在正数γ和δ使得$\|X_P\|<\gamma$时存在U中唯一测地线$\alpha(t)$，$|t|<\delta$，使得$\alpha(0)=P$，$\dfrac{d\alpha}{dt}(0)=X_P$。改变$\alpha$的参数，命$t=ct'$，$c$是非0常数，则$\alpha(t)=\alpha(ct')=\tilde{\alpha}(t')$也是一条测地线，并且$\tilde{\alpha}(0)=\alpha(0)=P$，$\dfrac{d\tilde{\alpha}}{dt'}(0)=c\dfrac{d\alpha}{dt}(0)=cX_P$，如果$\delta\geqslant 2$，则定理已经成立。设$\delta<2$，命$\varepsilon=\dfrac{\delta}{2}\gamma$，如果$P\in V$，$X_P\in T_PM$，$\|X_P\|<\varepsilon$，则$\left\|\dfrac{2}{\delta}X_P\right\|<\gamma$，根据上述推论，存在测地线$\alpha(t)$，其中$|t|<\delta$，并使得$\alpha(0)=P$，$\dfrac{d\alpha}{dt}(0)=\dfrac{2}{\delta}X_P$，改变$\alpha(t)$的参数，$\tilde{\alpha}(t')=\alpha\left(\dfrac{\delta}{2}t'\right)$仍是一条测地线，满足$\tilde{\alpha}(0)=P$，$\dfrac{d\tilde{\alpha}}{dt'}(0)=\dfrac{\delta}{2}\dfrac{d\alpha}{dt}(0)=X_P$，并且$\tilde{\alpha}(t')$对于$\left|\dfrac{\delta}{2}t'\right|<\delta$有定义，即对于$|t'|<2$有定义。‖

§8.2 指数映射和法坐标

设TM是黎曼流形M的切丛，π：$TM\longrightarrow M$是丛的投影，M_0是切丛的零截面，即映射S：$P\in M\mapsto O_P\in T_PM$，这是映$M$到$M_0$上的微分同胚使得$\pi\circ s=$恒同映射。设$Q\in M$，$U$是围绕$Q$的坐标域，局部坐标是$(x^1, \cdots\cdots, x^n)$，根据定理1，存在$U$

中Q的邻域V和正数ε，使得对于TM的开子集$D=\{X_P;\ P\in V,\ \|X_P\|<\varepsilon\}$，测地线$\alpha(t)$在$|t|<2$时有定义，并使得

$$\alpha(0)=P,\ \frac{d\alpha}{dt}(0)=X_P$$

在TM的开子集D上，我们可以定义指数映射Exp如下：

定义 1 $\operatorname{Exp}(X_P)=\alpha(1)$，即$X_P$在指数映射下的象是由$X_P$所确定的唯一测地线$\alpha$上的点$\alpha(1)$。

附记 （1）对于每一点$Q\in M$，存在一邻域V，使得Exp在开子集$D=\{X_P;\ P\in V,\ \|X_P\|<\varepsilon\}\subset\pi^{-1}(V)$上有定义，Exp的定义域$D$可以看成$M_0$在$TM$中的开邻域。

（2）由于$\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\|$是常数，$\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\|=\left\|\frac{d\alpha}{dt}(0)\right\|=\|X_P\|$

所以沿测地线$\alpha(t)$的从$\alpha(0)$到$\alpha(1)$的长度是

$$L=\int_0^1\left\|\frac{d\alpha}{dt}\right\|dt=\int_0^1\|X_P\|dt=\|X_P\|$$

因此，$\operatorname{Exp}X_P$是X_P所确定的唯一测地线上的点，它到P点的测地弧长正好等于X_P的长度。

引理 2 设$Q\in M$，$X_Q\in T_QM$，使得$\operatorname{Exp}X_Q$有定义，即$X_Q\in D$，则$\operatorname{Exp}tX_Q$在$|t|<1$有定义，并且$\alpha(t)=\operatorname{Exp}tX_Q$是$M$上的一条测地线，使得

$$\alpha(0)=Q,\ \frac{d\alpha}{dt}(0)=X_Q$$

证明：设$\alpha(t)$是由X_Q所确定的唯一测地线，使得$\alpha(0)=Q$，$\frac{d\alpha}{dt}(0)=X_Q$，给定常数$c$，$|c|<1$，命$\tilde{\alpha}(t)=\alpha(ct)$，这也是一条测地线，使得$\tilde{\alpha}(0)=Q$，$\frac{d\tilde{\alpha}}{dt}(0)=cX_Q$，则$\operatorname{Exp}(cX_Q)=\tilde{\alpha}(1)=\alpha(c)$，把$c$换成$t$，引理证毕。‖

定理 2 （法坐标域的存在定理）对于黎曼流形M的每一点Q，存在一邻域N，Exp_Q使得N微分同胚于切空间T_QM中零向量

O_Q 的邻域 $\tilde{N}$。

证明：设 U 是围绕 $Q\in M$ 的坐标域，局部坐标是 $(x^1,\cdots\cdots,x^n)$，根据定理1，存在 U 中点 Q 的邻域 V 和正数 ε 使得 $\forall P\in V$ 和 $\|X_P\|<\varepsilon$ 时，$\mathrm{Exp}X_P$ 有定义。我们把点 P 和 $X_P\in T_PM$ 所唯一确定的测地线局部地表示成

$$t\mapsto(f^1(t,a,b),\cdots\cdots,f^n(t,a,b))$$

其中

$$a=\varphi(P)=(a^1,\cdots\cdots,a^n),\quad X_P=\sum_i b^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right),$$

这意味着

$$\varphi(\mathrm{Exp}X_P)=(f^1(1,a,b),\cdots\cdots,f^n(1,a,b))$$

根据引理2，对于 $|t|<1$，

$$\varphi(\mathrm{Exp}tX_P)=(f^1(1,a,tb),\cdots\cdots,f^n(1,a,tb))$$

$$\therefore\ f^i(t,a,b)=f^i(1,a,tb),\ |t|<1,$$

$$i=1,\cdots,n$$

首先，由于函数 f^i 在 D 上是 C^∞ 的，所以对于 $\{X_P;\ P\in V,\|X_P\|<\varepsilon\}$，映射 $X_P\mapsto\mathrm{Exp}X_P$ 是 C^∞ 的。其次，我们计算 Exp_Q 在 T_QM 的零向量 O_Q 处的 Jacobian。由于 Q 固定，所以 $a^1,\cdots\cdots,a^n$ 是常数，我们计算 $\frac{\partial f^i}{\partial b^j}(1,a^1,\cdots\cdots,a^n,0,\cdots\cdots,0)$ 如下：

$$\frac{\partial f^i}{\partial b^j}(1,a,0)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[f^i(1,a,0,\cdots\cdots,\overset{(j)}{h},\cdots\cdots,0)-f^i(1,a,0,\cdots\cdots,0)]$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}[f^i(h,a,0,\cdots\cdots,\overset{(j)}{1},\cdots\cdots0)-f^i(0,a,0,\cdots\cdots\overset{(j)}{1}\cdots\cdots0)]$$

$$=\frac{\partial f}{\partial t}(0,a^1,\cdots\cdots,a^n;0,\cdots\cdots\overset{(j)}{1}\cdots\cdots0)$$

这是从Q点（坐标是$(a^1,\cdots\cdots,a^n)$）出发切于$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_Q$，$((b^1,\cdots\cdots,b^n)=(0,\cdots\cdots,\overset{(j)}{1},\cdots\cdots,0))$的测地线在$Q$点（$t=0$）的切向量，即$\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_Q$的第$i$个分量。

所以

$$\frac{\partial f^i}{\partial b^j}(1,a,0)=\delta^i_j$$

这说明，当点Q固定时，存在正数$\varepsilon'<\varepsilon$，使得映射$X_Q\mapsto \mathrm{Exp}X_Q$，局部地，即在开集$\widetilde{N}=\{X_Q:\ \|X_Q\|<\varepsilon'\}$上是微分同胚。‖

M的黎曼度量g在T_QM中定义了内积，因此我们可以在T_QM中选标准正交基$\{e_1,\cdots\cdots,e_n\}$，则$X_Q=\sum\limits_i y^ie_i$，并且$\|X_Q\|^2=\sum\limits_i(y^i)^2$，于是映射

$$\psi:\ \mathrm{Expq}\left(\sum_i y^ie_i\right)\mapsto(y^1,\cdots\cdots,y^n),\ \left(\sum_i|y^i|^2<\varepsilon'^2\right)$$

微分同胚地把O_Q的邻域$\widetilde{N}$映到n维实球$B^n_{\varepsilon'}(0)\subset R^n$上。

定义 2 对于以上定义的围绕$Q\in M$的局部坐标系$(\widetilde{N},\psi)$称为M上围绕Q的局部法坐标系。

附记 法坐标系对于研究微分流形上的几何的优越性表现在：

（1）$g_{ij}(0)=\delta_{ij}$；

（2）M上通过Q的测地线方程是$y^i=a^it$（$i=1,2,\cdots\cdots,n$），a^i是常数；

（3）黎曼联络的 Christoffel 系数在Q点的值为 0，即

$\Gamma^k_{ij}(0)=0$，$i,j,k=1,\cdots\cdots n$

证明：（1）在映射ψ的定义中，$\{e_1,\cdots\cdots,e_n\}$是T_QM的标

准正交基，所以

$$g_{ij}=g(e_i, e_j)=\delta_{ij};$$

（2）得自引理 2；

（3）把测地线方程 $\alpha^i=a^i t$ 代入测地线方程

$$\frac{d^2\alpha^i}{dt^2}+\sum_{j,k}\Gamma_{jk}^i\frac{d\alpha^j}{dt}\frac{d\alpha^k}{dt}=0$$

得到

$$\sum_{j,k}\Gamma_{jk}^i(0)a^j a^k=0$$

因为 $\Gamma_{jk}^i=\Gamma_{kj}^i$，所以 $\Gamma_{jk}^i=0$，$(i, j, k=1, \cdots\cdots, n)$

定理 3 设 $Q\in M$，U 是围绕 Q 的坐标域，局部坐标是 $(x^1, \cdots\cdots, x^n)$，则存在 U 中 Q 的邻域 B 和正数 ε 使得对于 B 中任两点 P 和 P'，可以用长度小于 ε 的唯一测地线相连，这测地线方程是 $\mathrm{Exp}\,tX_P$，$0\leqslant t\leqslant 1$，它整个属于 U，因此对于每一点 $P\in B$，Exp_P 微分同胚地把开集 $\{X_P; \|X_P\|<\varepsilon\}$ 映成开集 N_P 使得 $B\subset N_P\subset U$。

证明：命 $X_P=\sum_i b^i\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P$，对于 $P\in V$，$\|X_P\|<\varepsilon$，

$\varphi(\mathrm{Exp}X_P)=(f^1(1, x^1, \cdots\cdots, x^n; b^1, \cdots\cdots, b^n), \cdots\cdots,$
$f^n(1, x^1, \cdots\cdots, x^n; b^1, \cdots\cdots, b^n))$

其中 $f^i(t, x, b)$ 是所有变量的 C^∞ 函数。考虑映射

F: $\{(\varphi(P), X_P); P\in V, \|X_P\|<\varepsilon\}\subset R^n\times R^n\rightarrow$
$\varphi(U)\times\varphi(U)\subset R^n\times R^n$

定义为

$F(x^1, \cdots\cdots, x^n; b^1, \cdots\cdots, b^n)=(x^1, \cdots\cdots, x^n, f^1(1, x,$
$b), \cdots\cdots, f^n(1, x, b))$

这个映射对应于定义域属于切丛 TM 的映射 $X_P\mapsto(P, \mathrm{Exp}X_P)$。我们从定理 2 的证明中已经知道，当 $b^1=b^2=\cdots\cdots=b^n=0$ 时，

$$\frac{\partial f^i}{\partial b^j}(1, x, 0)=\delta^i_j$$

所以映射F的 Jacobian 在任一点 $(x^1, \cdots\cdots, x^n, 0, \cdots\cdots, 0)\in R^n\times\{0\}$是非异的，其中 $(x^1, \cdots\cdots, x^n)=\varphi(P)$，$\forall P\in V$。因此根据隐函数定理，对于一对 (P,O_P)，存在TM中一邻域微分同胚地映到$U\times U\subset M\times M$的开子集上，把$V$和$\varepsilon$缩小一些（缩小后仍用符号$V$和$\varepsilon$）我们得到 (Q,O_Q) 的邻域$N(V,\varepsilon)=\{(P,X_P)\colon P\in V, \|X_P\|<\varepsilon\}$，它微分同胚地映到一开集$W\subset U\times U$上。由于$W$一定包含对角元素集$\{(P,P)\colon P\in V\}$，所以总存在$V$中$Q$点的邻域$B$使得$B\times B\subset W$且$B\times B$是$N(V,\varepsilon)$的某开子集$N_B=\{(P,X_P)\colon P\in B, \mathrm{Exp}X_P\in B\}$的微分同胚象，则$Q$的邻域$B\subset V\subset U$即为所求。注意$N_B\subset N(V,\varepsilon)$，所以$B\subset N_P$，定理证毕。||

附记 注意在上述邻域N_B的选择中并不能推出以下结果：

如果 $(P,X_P)\in N_B$，则有 $(P,tX_P)\in N_B$，$0<t<1$，因此对于$P,P'\in B$，连结P和P'的测地线不一定属于B，如果用另外的技巧去选择B使得P和$P'\in B$时，连结它们的测地线也属于B，这种邻域称为测地凸的。

引理 3 命$P\in B$，设Exp_p微分同胚地映T_PM中的开ε-实球到$N_P\supset B$上，则过P的测地线正交于测地球面$S_r=\{\mathrm{Exp}_p X_P\in N_P\colon \|X_P\|=r<\varepsilon\}$。

证明：命$X(t)$，$a<t<b$，是T_PM中一条光滑曲线，$\|X(t)\|=1$，任何一条从P出发的测地线可以写成$r\mapsto \mathrm{Exp}_p rX$，$0\leqslant r\leqslant\varepsilon$，$\|X\|=1$，并且$S_r$的任一条曲线可以表示成$t\mapsto \mathrm{Exp}_P rX(t)$，映射 $(r, t)\mapsto\alpha(r, t)=\mathrm{Exp}_p rX(t)$ 光滑地把矩形$[0,\varepsilon]\times[a, b]$映到$M$中，下面要证明$g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r}, \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)=0$，其中$\frac{\partial\alpha}{\partial r}$是从$P$出发的测地线的切向量场，$\frac{\partial\alpha}{\partial t}$是测地球面$s_r$上曲线的切向量场。

$$\frac{D}{\partial r} g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)=g\left(\frac{D}{\partial r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right), \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)$$
$$+g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{D}{\partial r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)\right)$$

当 t 不动时，$\alpha(r, t)$ 是从 P 出发的测地线，它的切向量场 $\frac{\partial \alpha}{\partial r}$ 沿曲线是平行的，所以 $\frac{D}{\partial r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right)=0$；再设 r 不动，由于 $\frac{D}{\partial r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right)=0$，$\therefore \frac{D}{\partial r}\left\|\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right\|^2=\frac{D}{\partial r} g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{\partial \alpha}{\partial r}\right)=0$，

所以 $\left\|\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right\|=\left\|\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right\|_{r=0}=\|X(t)\|=1$

$$g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{D}{\partial r}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)\right)=g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2} \frac{D}{\partial t} g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{\partial \alpha}{\partial r}\right)=\frac{1}{2} \frac{D}{\partial t}\left\|\frac{\partial \alpha}{\partial r}\right\|^2$$
$$=\frac{1}{2} \frac{D}{\partial t}\|X(t)\|^2=0$$
$$\therefore \quad g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)=g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)_{r=0}$$

因为 $\alpha(0, t)=P$，$\left.\frac{\partial \alpha}{\partial t}\right|_{r=0}=0$，因此

$$g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial r}, \frac{\partial \alpha}{\partial t}\right)=0 \,\|$$

引理 4 考虑 $N_P-\{P\}$ 中一条逐段光滑曲线 $\tilde{\alpha}(t)$，$a \leqslant t \leqslant b$，通过指数映射它可以唯一地表示成 $\tilde{\alpha}(t)=\operatorname{Exp}_P r(t) X(t)$，$\|X(t)\|=1$，则

$$\int_a^b\left\|\frac{d \tilde{\alpha}}{d t}\right\| d t \geqslant|r(b)-r(a)|$$

其中等号成立当且仅当 $r(t)$ 单调，$X(t)$ 是常矢量。

证明：设 U 是围绕 P 的坐标域，考虑映射 $[0, \varepsilon] \times[a, b] \rightarrow U$，$(r, t) \mapsto \alpha(r, t)=\operatorname{Exp}_P r X(t)$，命 $\tilde{\alpha}(t)=\alpha(r(t), t)$ 是连结分别以 $r=r(a)$ 和 $r=r(b)$ 为半径的测地球面的曲

线，则有

$$\frac{d\tilde{\alpha}}{dt}=\frac{\partial\alpha}{\partial r}r'(t)+\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$

根据引理3，$\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial r}\right\|=\|X(t)\|=1$，$g\left(\frac{\partial\alpha}{\partial r},\ \frac{\partial\alpha}{\partial t}\right)=0$，我们有

$$\left\|\frac{d\tilde{\alpha}}{dt}\right\|^2=|r'(t)|^2+\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|^2\geqslant|r'(t)|^2$$

$$\int_a^b\left\|\frac{d\tilde{\alpha}}{dt}\right\|dt\geqslant\int_a^b|r'(t)|dt\geqslant\left|\int_a^b r'(t)dt\right|$$

$$=|r(b)-r(a)|$$

其中

$\int_a^b\left\|\frac{d\tilde{\alpha}}{dt}\right\|dt=|r(b)-r(a)|$ 当且仅当 $\left\|\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right\|=0$，即 $X(t)$ 是常矢量，并且 $\int_a^b|r'(t)|dt=\left|\int_a^b r'(t)dt\right|$，即 $r(t)$ 是单调的。‖

定理4 对于黎曼流形 M 上每一点 Q，存在一邻域 B 和正数 ε 使得 B 中每一对点可以用长度为 $L<\varepsilon$ 的唯一测地线相连结，并且连结这两点的任何光滑曲线的长度 $L'\geqslant L$，此外，$L'=L$ 当且仅当它们以弧长作参数时是重合的。

证明：根据定理3，给出 $Q\in M$，存在邻域 B 和 $\varepsilon>0$ 使得 B 中每一对点 P 和 P' 可以用长度 $L<\varepsilon$ 的唯一测地线相连结，事实上，这条测地线的方程就是

$\alpha(t)=\mathrm{Exp}_p tX_P$，$0\leqslant t\leqslant 1$，$\|X_P\|=L$，$B\subset U$ 并且 $\alpha(t)\subset U$。Exp 把 T_PM 上的开实球 $\{X_P;\ \|X_P\|<\varepsilon\}$ 微分同胚地映成 U 中包含 B 的开集 N_P。我们把 N_P 的边像，即 $\{X_P;\ \|X_P\|=\varepsilon\}$ 的像记成 S_ε，这是 U 中的测地球面。

设 $\tilde{\alpha}(t)$：$0\leqslant t\leqslant 1$ 是逐段光滑曲线，连结点 $P=\tilde{\alpha}(0)$ 和 $P'=\tilde{\alpha}(1)=\mathrm{Exp}_p rX_P\in N_P$，$0<r<\varepsilon$，$\|X_P\|=1$。命 s 满足 $0<s<\varepsilon$ 并考虑 $\tilde{\alpha}$ 中介于以 P 为中心，r 和 s 为半径的测地球面

之间的弧。根据引理 4，这段弧长$\geqslant|r-\delta|$；其中等号成立当且仅当这一段弧重合于从P出发的测地线上介于两测地球面之间的部分，这段弧的长度是$|r-s|$。命$\delta\to 0$，则定理就证明了。‖

这定理说明了：对于任一点$Q\in M$，存在正数ε和球邻域$B=\{P\in M;\ d(P,Q)<\varepsilon/2\}$，使得对于$B$中任意两点$P$和$P'$，存在唯一测地线，它的长度是$d(P, P')$。

推论 设P，Q是M上两点，如果一条连结它们的逐段光滑的曲线的长度是$d(P, Q)$，则它一定是一条由弧长所参数化的测地线。

证明：因为这条曲线局部地是测地线，因此整体上也是测地线。

定义 3 M上一条测地线段，如果它的长度正好等于它的两端之间的距离，则称为最短测地线。

实例 设$M=S^2$，连结球面S^2上任两点的大圆劣弧是最短测地线；大圆优弧也是S^2上的测地线，但不是最短的。

§8.3 Hopf-Rinow 定理

在这一节中我们将研究黎曼流形M上的测地线能否无限延伸的问题，闭测地线就是可以无限延伸的测地线的例子。如果从一点$P\in M$出发的每一条测地线都可以无限延伸，则指数映射Exp_P的定义域就是整个切空间T_PM。

引理 5 设P_0，P_1，…，P_n是M上的点，使得

(*) $d(P_0,P_1)+d(P_1, P_2)+\cdots+d(P_{n-1}, P_n)=d(P_0, P_n)$

如果M上一条逐段光滑的曲线包含点P_i，P_{i+1}，…，P_{i+r}，并且它的长度正好等于$d(P_i,P_{i+1})+d(P_{i+1}, P_{i+2})+\cdots+d(P_{i+r-1}, P_{i+r})$，则它一定是从$P_i$到$P_{i+r}$的测地线段；反之，如果$P_0$，…，$P_n$顺序地在一条测地线上，则（*）一定成立。

证明：只须考虑$r=2$的情形，设连结P_i，P_{i+1}和P_{i+2}的

曲线C的长度$L=d(P_i, P_{i+1})+d(P_{i+1}, P_{i+2})$，根据三角形不等式$L\geqslant d(P_i, P_{i+2})$，如果等号成立，则根据定理 4 的推论，$C$是从$P_i$到$P_{i+2}$的最短测地线，等号一定成立，不然的话

$$d(P_i,P_{i+1})+d(P_{i+1},P_{i+2})>d(P_i,P_{i+2})$$

代入（*）式

$$d(P_0,P_1)+\cdots+d(P_i,P_{i+2})+\cdots+d(P_{n-1}, P_n)$$
$$<d(P_0,P_n)$$

与三角形不等式矛盾，$r>2$的情形用归纳法。

引理的后半部分得自下列事实：最短测地线的子线段也是最短的，因此，$d(P_i,P_{i+1})$是从P_i到P_{i+1}的测地弧长。‖

引理 6 如果黎曼流形M有这样的性质：它从点$P\in M$出发的每一条测地线都是可以无限延伸的，则M上的任一点Q，都可以与P用一条最短测地线相连结，长度当然是$d(P,Q)$。

证明：设$a=d(P,Q)$，从P点出发的每一条测地线可以写成$\alpha(s)=\mathrm{Exp}_p sX_P$，其中$X_P\in T_PM$，$s$是$\alpha$的从$P=\alpha(0)$量起的弧长，把$X_P$伸缩一下，使$\|X_P\|=1$，则$\alpha(a)=\mathrm{Exp}_p aX_P=Q$，$s\mapsto\mathrm{Exp}_p sX_P$，$0\leqslant s\leqslant a$，是最短测地线。

根据定理 3，存在正数δ使得$S_\delta=\{P'\in M|d(P,P')=\delta\}$是围绕$P$的某法坐标域中的测地球面，把$\delta$选得小一些，使得从$P$出发到球面$S_\delta$的每一条测地线最短，因为$S_\delta$紧，所以总存在$P_0\in S_\delta$满足

$$d(P_0,Q)=\inf_{p'\in S_\delta} d(P',Q)$$

命X_p是P点的单位切向量，使得$P_0=\mathrm{Exp}_p\delta X_p$，我们应有

$$d(P,P_0)+d(P_0,Q)=d(P,Q)$$

不然的话，将存在一条长度小于$d(P,P_0)+d(P_0,Q)=\delta+d(P_0,Q)$的连结$P$和$Q$的逐段光滑曲线$C$，设$C$交$S_\delta$于一点$P'$，$C$上从$P$到$P'$的弧长$\geqslant\delta$，因此$d(P', Q)<d(P_0,Q)$，与$P_0$的选择方法矛盾。

设$s' \in [0, a]$使得测地线段 $s \mapsto \mathrm{Exp}_p sX_p$, $0 \leqslant s \leqslant s'$ 是最短的，并且还有

$$d(P, \mathrm{Exp}_p s' X_p) + d(\mathrm{Exp}_p s' X_p, Q) = d(P, Q)$$

$[0, a]$中满足这个条件的点s'构成一闭集$[0, b]$，如果$b < a$，命$P_1 = \mathrm{Exp}_p bX_p$，则应有

$$d(P, P_1) + d(P_1, Q) = d(P, Q)$$

命 S_η 是围绕 P_1 的法坐标域中的小测地球面，在 S_η 上选一点 P_2 使得

$$d(P_2, Q) = \operatorname*{Inf}_{P'' \in S_\eta} d(P'', Q)$$

则与上面的证明一样：$d(P_1, P_2) + d(P_2, Q) = d(P_1, Q)$，因此

$$d(P, P_1) + d(P_1, P_2) + d(P_2, Q) = d(P, Q)$$

根据引理5，测地线$\alpha(s) = \mathrm{Exp}_p sX_p$，$0 < s < b$，再加上$S_\eta$中从$P_1$到$P_2$的测地射线，就得到从$P$到$P_2$的最短测地线，它的长度$d(P, P_2) > d(P, P_1) = b$，这与$b$的定义矛盾，因此$b = a$，即可以选$\delta = a = d(P, Q)$。这时，$d(P_0, Q) = 0$，所以$Q$重合于$P_0$；于是存在$X_p \in T_pM$使得$\mathrm{Exp}_p aX_p = P_0 = Q$。引理证毕。‖

定理5 (Hopf-Rinow 定理) 命M是一连通黎曼流形，则下面两性质是等价的：

(1) 任何一条测地线段可以无限延伸；

(2) 对于度量$d(P, Q)$，M是完备度量空间，即M中任一Canchy点列是收敛的。

证明：(1)⇒(2)。设M上任一测地线段$t \mapsto \alpha(t)$，$t \in [a, b]$，可以无限延伸使得$t \in (-\infty, +\infty)$，要证明M是完备的只需证明它的任一有界闭集是紧致的。命K是M中的有界闭集，设

$$P \in K, \quad a = \operatorname*{Sup}_{Q \in K} d(P, Q)$$

因为K有界，所以a有限，根据引理6，对于$\forall Q \in K$，存在一条

从P至Q的最短测地线，它的长度$d(P,Q)<a$，因此$K\subset \mathrm{Exp}_p\bar{B}_a$，其中$\bar{B}_a=\{Y_p\in T_pM;\ \|Y_p\|\leqslant a\}$是$T_pM$中以$a$为半径的闭实球，因为$\bar{B}_a$紧致，$\mathrm{Exp}_p$是$C^\infty$映射，所以$\mathrm{Exp}_p\bar{B}_a$也紧致。$K$是紧致集$\mathrm{Exp}_p\bar{B}_a$的闭子集，所以$K$也是紧致的。

（2）⇒（1）设M上每一Cauchy点列是收敛的，现在要指出这条件可以推出测地线的延伸性。用反证法。设结论不对，则存在一测地线$\alpha(t)$，$0\leqslant t\leqslant t_0$，它不能扩充到$t_0$，我们还可以假定，必要时可以改变参数，使$t$为弧长，命$\{t_n\}$是参数值的递增序列使得$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t_0$。用$P_n$表示点$\alpha(t_n)$，我们有$d(P_m,P_n)=|t_n-t_m|$。因为右边是从$P_m$到$P_n$的测地弧长，可是$\{P_n\}$是Cauchy点列，命点列的极限点为$Q$，$Q=\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\lim\limits_{t_n\to t_0}\alpha(t_n)$，选$Q$的邻域$B$并选正数$\varepsilon$使得$B$中每一对点$P$和$P'$可以用弧长$<\varepsilon$的唯一测地线相连结。当然这条测地线是最短的，或者等价地说：它的弧长是$d(P,P')$。命N是充分大的正整数使得n，$m\geqslant N$时，$d(P_n,P_m)<\varepsilon$并且$d(P_n,Q)<\varepsilon$，$P_n,P_m\in B$，设$n\geqslant N$已固定，$m>n$，则我们有

$$d(P_n,P_m)+d(P_m,Q)=(t_m-t_n)+d(P_m,Q).$$

其中t_m-t_n是从P_n到P_m的测地弧长，因为$t_m-t_n<\varepsilon$，所以这条测地线是最短的，命$m\to\infty$，$d(P_n,P_m)\to d(P_n,Q)$。根据连续性$d(P_n,Q)=t_0-t_n$。因此，当$m>n>N$时

$$d(P_n,P_m)+d(P_m,Q)=t_m-t_n+t_0-t_m$$
$$=t_0-t_n=d(P_n,Q)$$

因此，从P_n到P_m的长度为$d(P_n,P_m)$的一测地线段加上从P_m到Q的长度为$d(P_m,Q)$的唯一测地线段得到长度等于$d(P_n,Q)$的曲线，这是从P_n到Q的唯一测地线，于是我们把从P出发的测地线扩充到Q，即$\alpha(t)$可以扩充到$t=t_0$，矛盾。

从测地线的存在定理知：一条测地线段$\alpha(t)$，$0\leqslant t\leqslant t_0$，可以从端点往外扩充。因此在一个完备的黎曼流形上，任一测地

线可以无限扩充．即对于$\forall P\in M$，Exp_p在整个T_pM上有定义，并且Exp_p以整个切丛$T(M)$为它的定义域，即$D=T(M)$，定理证毕．‖

由于紧度量空间是完备的，所以得到

推论 1 如果一个连通黎曼流形M是紧致的，则对于任一对点P，$Q\in M$，可以用长度为$d(P,Q)$的测地线段连结．

推论 2 命F_1，F_2：$M_1\to M_2$分别是完备连通黎曼流形的保长映射并且对于某一$P\in M$，假设$F_1(P)=F_2(P)$并且在T_pM上$F_{1*}=F_{2*}$，则$F_1=F_2$

证明：命$Q\in M$，$\alpha(s)$，$0\leqslant s\leqslant l$是从$P=\alpha(0)$到$Q=\alpha(l)$的测地线，则$F_i(\alpha(s))$是从$F_i(P)$到$F_i(Q)$的测地线，$i=1$，2．因为$F_1(P)=F_2(P)$，$F_{1*}(\alpha(0))=F_{2*}(\alpha(0))$，所以这两测地线重合．因此

$$F_1(Q)=F_1(\alpha(l))=F_2(\alpha(l))=F_2(Q)\ \|$$

第九章　李导数和Killing向量场

§9.1　单参局部变换群

设M是n维C^∞流形。

定义 1　M上的单参变换群$\{\varphi_t\}$是光滑映射

$$\varphi:\ R\times M\to M,\ (t,P)\mapsto\varphi(t,P)=\varphi_t(P)$$

满足下列条件：

（1）对于$\forall t\in R$，φ_t是M中的变换，

（2）对于$\forall t,\ s\in R$，$\varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_{t+s}$

$$\left(\frac{d\varphi_t(P)}{dt}\right)_0=X_p\in T_pM$$

$X=\{X_P\}$构成M上的光滑向量场，称为单参变换群$\{\varphi_t\}$的诱导向量场。

反过来，给定M上一光滑向量场，相应的单参变换群不一定存在。不过，局部上是存在的。

定义 2　设U是M中一坐标域，$I_\varepsilon=(-\varepsilon,\varepsilon)\subset R$，单参局部变换群是映射

$$\varphi:\ I_\varepsilon\times U\to M,\ (t,P)\mapsto\varphi_t(P)$$

满足下列条件：

（1）对于$\forall t\in I_\varepsilon$，$\varphi_t$是$U$中的变换

（2）对于$\forall\ t,\ s,\ t+s\in I_\varepsilon$，$\varphi_t\circ\varphi_s=\varphi_{t+s}$

定理 1　设X是M上任意给定的光滑向量场，对于$\forall P_0\in M$，存在P_0的邻域U和正数ε使得在$I_\varepsilon\times U$上存在单参局部变换群$\{\varphi_t\}$，它诱导X。

证明：命U是围绕P_0的坐标域，局部坐标是（x^1，…，x^n），

$x^i(P_0)=0$，再命 $X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ 考虑常微分方程组

$$\frac{dx^i}{dt}=x^i(x^1,\cdots\cdots,x^n)\quad(i=1,\cdots\cdots,n)$$

根据常微分方程组的解的存在唯一定理知：存在 $\delta_1>0$，$\varepsilon_1>0$ 和定义在 $I_{\varepsilon_1}\times U_1$ 上的解

$$x^i=f^i(t,c_1,\cdots\cdots,c_n)\quad(i=1,\cdots\cdots,n)$$

满足条件：$f^i(0,c_1,\cdots\cdots,c_n)=c_i$ 其中

$$I_{\varepsilon_1}=(-\varepsilon_1,\varepsilon_1),\ U_1=\{x\in U;\ |x^i|<\delta_1\}$$

命 $\varphi_t(x)=(f^1(t,x^1,\cdots\cdots,x^n),\ \cdots\cdots,f^n(t,x^1,\cdots\cdots,x^n))$

如果 t，s，$t+s\in I_\varepsilon$，x，$\varphi_s(x)\in U_1$，固定 s，命 $g^i(t,x)=f^i(t+s,x)$。则它是微分方程组的满足初始条件 $g^i(0,x)=f^i(s,x)=\varphi_s(x)$ 的解，由解的唯一性知 $g^i(t,x)=f^i(t,\varphi_s(x))$。所以

$$\varphi_{t+s}(x)=\varphi_t\circ\varphi_s(x).$$

命 $\varphi(t,x)=\varphi_t(x)$，对于映射 φ：$I_{\varepsilon_1}\times U_1\to V_1$，因为 $\varphi(0,P_0)=P_0$，根据 φ 的连续性，存在更小的正数 ε 和 δ，使得 $|t|<\varepsilon$ 时 $\varphi_t(0)\subset U$ 其中 $U=\{x\in U_1|\ \ |x^i|<\delta\}$。则对于 $t\in I_\varepsilon$，$x\in U$，我们有

$$\varphi_{-t}\circ\varphi_t(x)=\varphi_t\circ\varphi_{-t}(x)=\varphi_0(x)=x$$

所以 $t\in I_\varepsilon$ 时，φ_t 具有逆射 φ_{-t}，因此 φ_t 是局部同构映射，即是局部变换，所以 $\{\varphi_t\}$ 是单参局部变换群

$$\left(\frac{d\varphi_t(P)}{dt}\right)_{t=0}=\left(\frac{df^1(t,P^1,\cdots,P^n)}{dt},\ \cdots\cdots,\right.$$
$$\left.\frac{df^n(t,P^1,\cdots,P^n)}{dt}\right)_{t=0}$$
$$=(X^1(P^1,\cdots,P^n),\cdots\cdots,X^n(P^1,\cdots\cdots,P^n))=X(P)$$

所以在 $I_\varepsilon\times U$ 上，$\{\varphi_t\}$ 诱导已知向量场 X，根据常微分方程解的唯一性，这样的单参局部变换群 $\{\varphi_t\}$ 是唯一的。‖

附记：$\{\varphi_t\}$诱导向量场X，又可以说成，X生成$\{\varphi_t\}$。

§9.2 李 导 数

给出n维C^∞流形M上的一个光滑向量场X，它生成单参局部变换群$\{\varphi_t\}$，映射φ_t：$M\to M$诱导切空间和它的对偶空间的映射

$$(\varphi_{-t})_*:\ T_{\varphi_t(P)}\to T_P;\quad (\varphi_t)^*:\ T^*_{\varphi_t(P)}\to T^*_P$$

因此，也诱导张量空间的映射

$$\Phi_t:\ (T^r_s)_{\varphi_t(P)}\to (T^r_s)_P$$

定义 3 设向量场X生成$\{\varphi_t\}$，对于流形M上的张量场T，

$$(L_XT)_P=\left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(T_{\varphi_t(P)})\right]_{t=0}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\Phi_t(T_{\varphi_t(P)})-T_P]$$

称为T对于X的李导数。L_X称为对于X的李微分。
显然$L_XT=0$当且仅当$T_P=\Phi_t(T_{\varphi_t(P)})$，$\forall t\in R$，$P\in M$。

命题 1 李氏微分有以下性质

(1) T是M上的(r,s)型张量场，则L_XT也是M上的(r,s)型张量场；

(2) $L_X(S\otimes T)=L_XS\otimes T+S\otimes L_XT$；

(3) L_X保持张量场的线性关系和收缩不变；

(4) 对于$f\in C^\infty(M)$，$L_Xf=Xf$，

证明：(1) T是M上的(r,s)型张量场，则Φ_tT也是M上的(r,s)型张量场。

$$(2)\ [L_X(S\otimes T)]_P=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\Phi_tS\otimes\Phi_tT)_P-(S\otimes T)_P]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\Phi_tS\otimes\Phi_tT)_P-(\Phi_tS\otimes T)_P+(\Phi_tS\otimes T)_P-(S\otimes T)_P]$$

$$=\lim_{t\to 0}(\Phi_t S)_P\otimes \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\Phi_t T)_P-T_P]$$

$$+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\Phi_t S)_P-S_P]\otimes T_P$$

$$=S_P\otimes(L_X T)_P+(L_X S)_P\otimes T_P$$

(3) $L_X(aS+bT)_P=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\Phi_t(aS+bT)_P-(aS+bT)_P]$

$$=a\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[(\Phi_t S)_r-S_P]+b\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\Phi_t T)_P-T_P]$$

$$=a\,(L_X S)_P+b\,(L_X T)_P$$

此外

$$\Phi_t(T\text{的收缩})=(\Phi_t T)\text{的收缩}$$

(4) $(L_X f)_P=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[f(\varphi_t(P))-f(P)]$

$$=(Xf)_P \quad \|$$

命题 2 $L_X(Y)=[X,Y]$

证明：设P属于坐标域U,局部坐标是$(x^1, \cdots\cdots, x^n)$，取充分小的t使得$\varphi_t(P)\in U$，设向量场X生成局部变换群$\{\varphi_t\}$，在U内

$$\varphi_t: \quad x\to\bar{x},\quad \bar{x}=\bar{x}(x,t)$$

首先，因为φ_0是恒同映射，$\therefore \bar{x}^i(x,0)=x^i$。因此

$$\left(\frac{\partial\bar{x}^j}{\partial x^i}\right)_{t=0}=\delta^j_i,\quad \left(\frac{\partial x^j}{\partial\bar{x}^i}\right)_{t=0}=\delta^j_i$$

再设

$$X=\sum_i X^i\frac{\partial}{\partial x^i},\quad Y=\sum_j Y^j\frac{\partial}{\partial x^j}$$

则

$$X^i=\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial t}\right)_{t=0} \qquad \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\right)_P =\left(\frac{\partial Y^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}}\right)_{t=0}$$

此外

$$\Phi_t(Y_{\varphi_t(P)})=(\Phi_{-t})\left(\sum_j Y^j(\bar{x})\frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}\right)_{\varphi_t(P)}$$

$$=\left(\sum_{i,\ j} Y^j(\bar{x})\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$$

$$\therefore \quad \left[\frac{\partial}{\partial t}\Phi_t(Y_{\varphi_t(P)})\right]_{t=0}=\sum_i\left[\sum_j Y^j(\bar{x})\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right)\right.$$

$$\left.+\sum_{j,\ k}\frac{\partial Y^j(\bar{x})}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial t}\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right]\frac{\partial}{\partial x^i}$$

由于

$$\sum_j\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}=\delta^i_k \qquad \sum\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}=\delta^i_k$$

$$\sum_j\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right)\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}+\sum_j\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^k}\right)=0$$

命 $t=0$

$$\sum_j\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right)_{t=0}\delta^j_k+\sum_j\delta^i_j\left(\frac{\partial X^j}{\partial x^k}\right)_P=0$$

$$\therefore \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right)_{t=0}=-\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)_P$$

于是得到

$$(L_XY)_P=\sum_i\left[\sum_j Y^j\left(-\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)\right)+\sum_j X^j\left(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}\right)\right]_P\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P$$

$$=\sum_{i,\ j}\left(X^j\frac{\partial Y^i}{\partial x^j}-Y^j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}\right)_P\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_P$$

$$=[X,Y]_P \|$$

推论 （1）$\left[L_X\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right]^j=-\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\ (\because Y^j=\delta_i^j)$

（2）L_X保持收缩，所以

$$L_X(\delta_j^i)=L_X\left\langle dx^i,\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=\left\langle L_X(dx^i),\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle+\left\langle dx^i,\ L_X\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right\rangle$$

因此

$$\left\langle L_X(dx^i),\ \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle=-\left\langle dx^i,\ L_X\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right\rangle=\left\langle dx^i,\ \sum_k\frac{\partial X^k}{\partial x^j}\ \frac{\partial}{\partial x^k}\right\rangle=\frac{\partial X^i}{\partial x^j}$$

$$\therefore\qquad L_X(dx^i)=\sum_j\frac{\partial X^i}{\partial x^j}dx^j$$

命题3 设

$$T=\sum_{i,\ j}T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$$

则有公式

$$L_XT=\sum_{i,\ j}\left[\sum_k X^k\frac{\partial}{\partial x^k}(T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s})-\frac{\partial X^{i_1}}{\partial x^k}T^{ki_2\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}-\cdots\cdots+\frac{\partial X^k}{\partial x^{j_1}}T^{i_1\cdots i_r}{}_{kj_2\cdots j_s}+\cdots\right]\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}$$

证明：根据命题1，（3）

$$L_XT=\sum_{i,\ j}X(T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s})\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}+\sum_{i,\ j}T^{i_1\cdots i_r}{}_{j_1\cdots j_s}X\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\right)\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_2}}\otimes\cdots$$

$$\otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} + \cdots - \sum_{i,\ j} T^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}$$

$$\otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes X(dx^{j_1}) \otimes dx^{j_2} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s} \cdots$$

然后应用命题 2 的推论（1）和（2）。‖

推论

$$L_X T = \sum_{i,\ j,\ k} [T^{i_1 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s;\, k} X^k - T^{k i_2 \cdots i_r}{}_{j_1 \cdots j_s} X^{i_1}{}_{;\, k} - \cdots$$

$$+ T^{i_1 \cdots i_r}{}_{k j_2 \cdots j_s} X^k{}_{;\, j_1} + \cdots] \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots$$

$$\otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}$$

证明：直接计算可得。

§9.3 Killing向量场

设M是n维微分流形，∇是切丛$T(M)$的线性联络，也称为M上的仿射联络。

定义 4 设M是带仿射联络的微分流形，X是M上的一向量场，X称为M上的无穷小仿射变换，如果它生成的单参局部变换群$\{\varphi_t\}$保持联络不变，即

$$\varphi_{t*}(\nabla_Y Z) = \nabla_{\varphi_{t*} Y}(\varphi_{t*} Z)$$

命题 4 向量场X是无穷小仿射变换，当且仅当$L_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(L_X Z) = \nabla_{[X,Y]} Z$，$\forall Y$，$Z \in C^\infty(M, TM)$。

证明：设X是无穷小仿射变换，并且$\{\varphi_t\}$是X生成的单参局部变换群，则有

$$\varphi_{t*}(\nabla_Y Z) = \nabla_{\varphi_{t*} Y}(\varphi_{t*} Z)$$

$$L_X(\nabla_Y Z) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} [\varphi_{t*}(\nabla_Y Z) - \nabla_Y Z]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\nabla_{\varphi_{t*}Y}(\varphi_{t*}Z)-\nabla_Y Z]$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\nabla_{\varphi_{t*}Y}(\varphi_{t*}Z)-\nabla_{\varphi_{t*}Y}Z]$$

$$+\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[\nabla_{\varphi_{t*}Y}Z-\nabla_Y Z]$$

$$=\nabla_Y\left[\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi_{t*}Z-Z)\right]+\nabla_{\lim\limits_{t\to 0}\frac{1}{t}(\varphi_{t*}Y-Y)}Z$$

$$=\nabla_Y(L_X Z)+\nabla_{L_X Y}Z$$

$$\therefore\quad L_X(\nabla_Y Z)-\nabla_Y(L_X Z)=\nabla_{[X,Y]}Z$$

反之，设上式成立，固定一点$x\in M$，命

$$V(t)=[\varphi_{t*}(\nabla_Y Z)]_x,\quad W(t)=[\nabla_{\varphi_{t*}Y}(\varphi_{t*}Z)]_x$$

$$\frac{dV(t)}{dt}=\left[\lim_{h\to 0}\frac{\varphi_{t+h}(\nabla_Y Z)-\varphi_t(\nabla_Y Z)}{h}\right]_x$$

$$=\varphi_t\left[\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\varphi_h(\nabla_Y Z)-\nabla_Y Z)\right]_{\varphi_{-t}(x)}$$

$$=\varphi_t[L_X(\nabla_Y Z)]_{\varphi_{-t}(x)}$$

$$\frac{dW(t)}{dt}=\varphi_t[\nabla_{[X,Y]}Z+\nabla_Y(L_X Z)]_{\varphi_{-t}(x)}$$

$$\therefore\quad \frac{dU(t)}{dt}=\frac{dW(t)}{dt},$$ 并且$V(0)=W(0)$，

所以$V(t)=W(t)$，证毕。‖

定义 5 黎曼流形$(M,\ g)$上的向量场X称为无穷小保长变换或 Killing 向量场，如果$L_X g=0$。

命$A_X=L_X-\nabla_X$，其中∇是黎曼联络。因为$\nabla_X g=0$，所以X是 Killing 向量场，如果$A_X g=0$。

$A_X Y=-\nabla_Y X-T(X,Y)$，其中T是挠率张量场，$T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y]$。但是黎曼联络$\nabla$是无挠率的，所以

$A_X Y = -\nabla_Y X$，用局部坐标来表示A_X是（1，1）型张量场

$$(A_X)^i_j = -X^i{}_{;j}$$

其中$X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$。

命题 5 黎曼流形（M，g）上的向量场X是Killing向量场，当且仅当A_X是反对称的，即

$$g(A_X Y, Z) + g(Y, A_X Z) = 0, \quad \forall Y, Z \in C^\infty(M, TM).$$

用局部坐标来表示，就是

$$X_{i;j} + X_{j;i} = 0$$

证明：

$$A_X[g(Y, Z)] = (A_X g)(Y, Z) + g(A_X Y, Z) + g(Y, A_X Z)$$

$A_X = L_X - \nabla_X$映每一函数为0。所以$A_X g = 0$当且仅当$g(A_X Y, Z) + g(Y, A_X Z) = 0$。‖

第十章　常曲率黎曼流形

§10.1　常曲率黎曼流形

定义 6　黎曼流形 (M, g) 称为常曲率的，如果它的各点处所有平面截面的截面曲率等于相同的常数K，这时，局部地有

$$R_{ijkl}=-K(g_{ki}g_{jl}-g_{il}g_{jk})$$

所以 $R_{ijkl;m}=0$。曲率张量场是平行的，因此，这黎曼流形是局部对称的。

设M是一黎曼流形，U是M的一坐标域，局部坐标是 $(x^1, \cdots\cdots, x^n)$，$\{e_1, \cdots\cdots, e_n\}$是$U$上的局部标准正交标架场，$\{\omega^1, \cdots\cdots\omega^n\}$是对偶标架场，则$M$上有结构方程

$$d\omega^i=-\sum_j \omega_j^i\wedge\omega^j,\ \ \omega_j^i+\omega_i^j=0$$

$$d\omega_i^j+\sum_k \omega_i^k\wedge\omega_k^j=\Omega_i^j$$

其中

$$\Omega_i^j=\frac{1}{2}\sum_{k,\ l} R_{ikl}^j\omega^k\wedge\omega^l$$

如果M是常曲率的，注意现在

$$g_{ij}=g(e_i, e_j)=\delta_{ij}$$

$$\therefore\quad R_{ikl}^j=R_{ijkl}=-K(\delta_{ik}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jk})$$

$$\Omega_i^j=K\omega^i\wedge\omega^j$$

实例：

（1）n 维欧氏空间R^n，$K=0$；

（2）R^{n+1}中的单位球面S^n，$K=+1$；

（3）双曲空间 H^n，命M是R^n的上半平面$=\{x\in R^n;\ x^n>$

0}带有黎曼度量.（注意M只用一个坐标域覆盖）

$$ds^2=\frac{1}{(x^n)^2}\{(dx^1)^2+\cdots+(dx^n)^2\}，\text{即 } g_{ij}=\frac{1}{(x^n)^2}\delta_{ij}.$$

命$\left\{e_i=x^n\dfrac{\partial}{\partial x^i}\quad(i=1,\cdots\cdots,n)\right\}$这是$M$上的标准正交标架场，对偶标架场是$\{\omega^i=(x^n)^{-1}dx^i,\quad i=1,\ \cdots\cdots,\ n\}$。容易验证，

$$\omega_i^j=\delta_{nj}\omega^i-\delta_{ni}\omega^j$$

满足结构方程

$$d\omega^i=\sum_j\omega^j\wedge\omega_j^i\quad \omega_i^j+\omega_j^i=0$$

$$\Omega_i^j=d\omega_i^j+\sum_k\omega_i^k\wedge\omega_k^j=-\omega^i\wedge\omega^j$$

$$K=-1.$$

§10.2 完备常曲率黎曼流形

引理（Cartan-Ambrose） 命M和N是同维数、完备、连通黎曼流形，各带平行曲率场，此外更设M是单连通的，如果$P\in M$和$Q\in N$,并且φ：$T_PM\to T_QN$是保持内积和曲率的线性映射，即对于$\forall X_P,\ Y_P,\ Z_P,\ W_P\in T_PM$，我们有$g_Q(\varphi(X_P),\varphi(Y_P))=g_P(X_P,Y_P)$ 并且

$$R_Q(\varphi(X_P),\varphi(Y_P),\varphi(Z_P),\varphi(W_P))$$
$$=R_P(X_P,Y_P,Z_P,W_P)$$

则存在唯一C^∞映射F：$M\to N$，它有以下性质：（i）$F(P)=Q$，（ii）F_*：$T_PM\to T_QN$，$F_*=\varphi$。（iii）F是黎曼覆盖映射（即是一覆盖映射使得F_*在每一切空间上是保长的——即局部保长的）。

证明见J. A. Wolf：*Space of Constant Curvature* 1972。

把上引理用到常曲率黎曼流形M，分别命$N=R^n$，S^n，H^n，我们有

定理 每一常曲率$K=0$，$+1$或-1的完备、单连通黎曼流

形M，可保长地映成上述三例子之一。即$K=0$时映成R^n，$K=+1$时映成S^n，$K=-1$时映成H^n。给出T_PM到$T_QN(N=R^n$，S^n或$H^n)$一个给定的保持内积的线性映射φ，存在唯一M到N的保长映射F使得$F_*=\varphi$。

推论 1 命M分别是R^n，S^n和H^n，P，Q是M上任两点，$\{e_{1P},\ \cdots\cdots,\ e_{nP}\}$和$\{e_{1Q},\ \cdots\cdots,\ e_{nQ}\}$分别是$P$和$Q$上的标准正交标架，则存在唯一$M$的保长映射$F$，$F(P)=Q$并且$F_*(e_{iP})=e_{iQ}$，$i=1$，……，$n$。

推论 2 命M是常曲率$K=0$，$+1$和-1的完备黎曼流形，则它的泛覆盖流形$\widetilde{M}$可保长地分别映射成R^n，S^n和H^n，$M=\widetilde{M}/\Gamma$，其中Γ是自由地作用于$\widetilde{M}$的离散保长群。

证明：$\widetilde{M}$单连通，F是覆盖映射，$\therefore M=\widetilde{M}/\Gamma$，其中$\Gamma$是$M$的基本群，由于$F$是保长的，所以$\Gamma$是保长群。

（1）正曲率空间

要寻找正常曲率$K=+1$的黎曼流形，只须寻找单位球面S^n的保长群$O(n+1)$的离散子群Γ，Γ是自由地作用于S^n，这意味着Γ中除了恒同映射I之外没有一个元素保持S^n的一点不动。因此，如果$A\in\Gamma$，$A\neq I$，则A只能以$+1$为特征值，此外，Γ应是有限阶的，不然的话，应存在某个$X\in S^n$使得$\Gamma_X=\{A_X;\ A\in\Gamma\}$有一极限点这将与$\Gamma$的离散性矛盾，因此，我们应该寻找$O(n+1)$的有限子群$\Gamma$，其中除了$I$以外，没有一元素保持向量$X$不动。

$O(n+1)$中上面描述的那一类型的子群的最简单例子是$\Gamma=\{\pm 1\}$这时S^n/Γ的元素是S^n的一对对径点，它就是射影空间$P^n(R)$，因此对于每一n，至少有两个不等价的正常曲率空间——实射影空间与它的泛（黎曼）覆盖空间S^n。

命题 1 如果n为偶数，则S^n和$P^n(R)$是仅有的完备常曲率$K=+1$的流形。

证明：设$A\in\Gamma\subset O(n+1)$，因为A的特征多项式是奇次的，

因此A的特征值中有一个是实数，但是正交矩阵的特征值的绝对值为1，所以A有特征值为±1，但是Γ自由地作用于S^n，只有I使S^n的每一点不动，因此仅当$A=I$时才有特征值$+1$，其他A的特征值为-1，这说明A^2的特征值为$+1$，$A^2=I$，$\therefore A=\pm I$，所以$\Gamma=\{I\}$或$\{\pm I\}$，则$M=S^n$和$P^n(R)$。‖

但是n为奇数时，则可能出现其他情形。

实例 S^3上的Γ是$O(4)$的有限子群，Γ自由地作用于S^3，相应的常曲率流形是S^3/Γ。

考虑四元素代数K：

$$q=x+yi+zj+wk,$$
$$\bar{q}=x-yi-zj-wk$$

$\|q\|=(q\bar{q})^{1/2}$，$K\approx R^4$，$\|q\|$给出R^4中的标准范数，再命

$$K_1=\{q\in K:\ \|q\|=1\}\approx S^3$$

左平移L_q：$K\to K$，$L_q(X)=q\cdot X$保持范数不变，即

$$\|L_q(X)\|=\|X\|$$

所以L_q是R^4中的正交变换，它诱导S^3上的保长映射，定义π：$K_1\to SO(3)$如下：命$R^3=\{q=x+yi+zj+wk\in K:\ x=0\}$，$q'\in K_1$，定义$\pi(q')\in SO(3)$为$q\mapsto q'q\bar{q}'$

注意 当$q\in R^3$时$q+\bar{q}=0$，$q'q\bar{q}'+\overline{q'q\bar{q}'}=q'q\bar{q}'+q'\bar{q}\bar{q}'=q'(q+\bar{q})\bar{q}'=0$，所以$q'q\bar{q}'\in R^3$。

此外易知：$\|q'q\bar{q}'\|=\|q\|$，所以$\pi(q')$是保长的，$\therefore\pi(q')\in SO(3)$

容易证明：π的核是±1，即如果$q'q\bar{q}'=q$，$\forall q\in R^3$，则$q'=\pm1$对于$SO(3)$中任一有限子群Γ，对应K_1中的有限子群Γ_1使得$\Gamma=\pi(\Gamma_1)$，于是我们得到完备常曲率黎曼流形$M=K_1/\Gamma_1$。

注意：$SO(3)$的有限子群是任何正多面体的对称群，再去掉行列式$=-1$的那部分。

（2）零曲率空间

$K=0$ 时，$M=R^n/\Gamma$，其中 Γ 是保长（运动）群的有限子群，R^n的保长映射是 $x\mapsto Ax+b$，其中 $A\in O(n)$，$b=(b^1,\cdots,b^n)$，以 $n=2$ 为例，R^2/Γ 的例子是：

柱面：$\Gamma=\{x\mapsto x+ne_1;\ e_1=(1,0),\ n\in Z\}$。其中 Z 表示整数集，

环面：$\Gamma=\{x\mapsto x+ne_1+me_2;\ e_1=(1,0), e_2=(0,1), m, n\in Z\}$。

附记：Hilbert 的著名问题中，有一个是：求 R^n 的运动群的固有离散子群 Γ 同构类的个数使得$M=R^n/\Gamma$ 是存在的，Bieberbach 在 1911 年证明：Γ 的同构类的个数是紧致的，并且所有的$M=R^n/\Gamma$ 都以柱面 T^n 为覆盖空间。

（3）负常曲率空间$K=-1$

考虑上半复平面$H^2=\{z=x+iy\in C;\ \mathrm{Im}\,z=y>0\}$，它的黎曼度量是

$$ds^2=\frac{dz\cdot d\bar{z}}{(\mathrm{Im}\,z)^2}=\frac{1}{y^2}(dx^2+dy^2).$$

考虑分式线性变换

$$z\mapsto w=\frac{az+b}{cz+d},\quad ad-bc\neq 0$$

命题 2 分式线性变换群G（其中$a, b, c, d\in R$）正好是H^2的保长变换群，映射Φ：$SL(2,R)\to G$，$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\mapsto w=\frac{az+b}{cz+d}$是在上同态，核是 $\pm I$。

证明：$\mathrm{Im}\,w=\frac{\mathrm{Im}\,z}{|cz+d|^2}>0$

$$dw=\frac{dz}{(cz+d)^2}$$

$$\therefore\quad \frac{dw\cdot d\bar{w}}{(\mathrm{Im}w)^2}=\frac{dz\cdot d\bar{z}}{(\mathrm{Im}\,z)^2}$$

命题前半部分证明了．命题的后半部分是显然的．||

设Γ是G的离散子群，考虑H^2/Γ，例如，$\Gamma=\{z\mapsto z+mw_1+nw_2\}$，则$C/\Gamma$是环面$T^2$．$H^2/\Gamma$也是类似的紧致流形．

参考书目

〔1〕 W.M.Boothby: *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1975.

〔2〕 陈省身、陈维桓：微分几何讲义，北京大学出版社，1983.

〔3〕 M.Spivak：流形上的微积分（齐民友、路见可译），科学出版社，1980.

〔4〕 C.Goffman：多元微积分（史济怀等译），人民教育出版社，1979.

〔5〕 N.J. Hicks: *Notes on Differential Geometry*, D.Van Nostrand, Princeton, 1965.

〔6〕 F.W.Warner: *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Scott and Foresman, Glenview, Illinois, 1971.

〔7〕 I.M.Singer, J.A.Thorpe: *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Scott and Foresman, Illinois, 1967.

〔8〕 陈省身：*Complex Manifolds*（美国芝加哥大学讲义），1956.

〔9〕 W.S.Massey: *Singular Homology Theory*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1980.

〔10〕 W.Klingenberg: *Riemannian Geometry*, *Walter de Gruyter*, Berlin-New, York, 1982.

〔11〕 J.Cheeger, D.G.Ebin: *Comparison Theorems in Riemannian Geometry*, North Holland, Amsterdan, 1975.

〔12〕 S. Helgason: *Differenital Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York-London, 1978.

〔13〕 R.L.Bishop, R.J.Crittenden: *Geometry of Manifolds*, Academic Press, New York, 1964.

〔14〕 S.Lang: *Differentiable Manifolds*, Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1972.

[General Information]
书名=微分流形与黎曼几何
作者=梅向明 贺龙光
页数=262
SS号=10237728
出版日期=1987年07月第1版

目录